повым свойством:

$$g^{t_2}(g^{t_1}(z)) = g^{t_1+t_2}(z). \qquad (18.3)$$

Отсюда еще один термин: $g^t_{\mathbf{v}}$ есть однопараметрическая группа, порожденная полем $\mathbf{v}$.

О локальности. Следует иметь в виду, что за некоторое время t точка $g^t_{\mathbf{v}}(z)$ может выйти за пределы той области на $\mathfrak{M}$, в которой определены координаты $z_1, ..., z_k$. Эта тонкость несущественна в следующем смысле: на деле фазовый поток как отображение $\mathfrak{M}$ в себе не зависит от выбора локальных координат (на доказательстве останавливаться не будем). Еще одна тонкость состоит в том, что векторное поле $\mathbf{v}$ может быть стеснено: не все решения системы определены при $-\infty<t<\infty$ даже после неограниченного продолжения их в других системах координат. Поэтому более строго было бы говорить о локальном фазовом потоке: для каждого z точка $g^t_{\mathbf{v}}(z)$ определена лишь для достаточно малых t. (Соответственно о выполнении группового свойства имеет смысл говорить лишь тогда, когда определены правая и левая части равенства (3).) Для большинства дальнейших рассуждений этого вполне достаточно. В ряде случаев нестесненность векторных полей существенна — тогда мы будем ее оговаривать. Когда многообразие $\mathfrak{M}$ компактно, то на нем все векторные поля не стеснены.

Если $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ — два векторных поля, то их скобка Ли

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}](f) = \mathbf{v}(\mathbf{u}(f)) - \mathbf{u}(\mathbf{v}(f))$$

есть новое векторное поле. Свойства скобки Ли:

1) кососимметричность: $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = -[\mathbf{v}, \mathbf{u}]$;
2) линейность над $\mathbf{R}$;
3) тождество Якоби:

$$[[\mathbf{u}, \mathbf{v}], \mathbf{w}] + [[\mathbf{w}, \mathbf{u}], \mathbf{v}] + [[\mathbf{v}, \mathbf{w}], \mathbf{u}] \equiv 0.$$

Таким образом, гладкие векторные поля образуют алгебру Ли.

Если $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] \equiv 0$, это означает, что фазовые потоки этих полей коммутируют: $g^t_{\mathbf{v}}(g^s_{\mathbf{u}}(x)) = g^s_{\mathbf{u}}(g^t_{\mathbf{v}}(x))$ (рис. 71).

Основное свойство коммутирующих полей. *Если*

$$[\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j] \equiv 0, \quad i, j = 1, ..., l \leqslant k,$$

то существуют локальные координаты $\xi_1, ..., \xi_k$ *такие, что*

$$\mathbf{u}_i = \frac{\partial}{\partial \xi_i}, \quad i = 1, \ldots, l \leqslant k$$

(*тогда поток поля* $\mathbf{u}_i$ *есть сдвиг по координате* ξ_i).

Дифференциальными формами называются кососимметрические тензоры ранга m (полилинейные функции m векторных аргументов):

$$\theta = \sum_{i_1<\ldots<i_m} \theta_{i_1 \ldots i_m} dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_m}.$$