Нам потребуются лишь 1- и 2-формы (и один раз — 3-форма, тождественно равная нулю):

а) при $m=1$ форма называется также ковекторным полем и записывается в виде

$$\omega=\Sigma\omega^i dz_i; \tag{18.4}$$

если $\mathbf{u}=\Sigma u_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ — векторное поле, то

$$\omega(\mathbf{u})=\Sigma\omega^i u_i, \tag{18.5}$$

в частности,

$$\omega=df=\sum \frac{\partial f}{\partial z_i}\,dz_i \Rightarrow df(\mathbf{u})=\mathbf{u}(f); \tag{18.6}$$

б) при $m=2$ форма записывается в виде

$$\Omega=\sum_{i<j}\Omega_{ij}dz_i\wedge dz_j; \tag{18.7}$$

для базисных 2-форм имеем

$$(dz_i\wedge dz_j)\,(\mathbf{u},\ \mathbf{v})=u_iv_j-v_iu_j \tag{18.8}$$

(впрочем, это зависит уже от соглашения: авторы многих руководств пишут справа множитель 1/2, а в выражении (7) снимают неравенство $i<j$ и добавляют условие $\Omega_{ij}=-\Omega_{ji}$).

Операция внешнего дифференцирования:

$$d\Theta=\sum_{i_1<\ldots<i_{m+1}}\left[\sum_j(-1)^{j+1}\,\frac{\partial\Theta_{i_1,\ldots,i_{j-1},i_{j+1},\ldots,i_{m+1}}}{\partial z_j}\right]dz_{i_1}\wedge\ldots\wedge dz_{i_{m+1}},$$

в частности, при $m=1$

$$d\omega=\sum_{i<j}\left(\frac{\partial\omega_j}{\partial z_i}-\frac{\partial\omega_i}{\partial z_j}\right)dz_i\wedge dz_j.$$

Формы можно интегрировать по ориентированным m-мерным поверхностям (в частности, 1-формы по кривым).

Формула Стокса. Если $\Theta=d\Theta'$, то

$$\int_{\sigma^m}d\Theta'=\int_{\partial\sigma^m}\Theta',$$

где $\partial\sigma^m$ — $(m-1)$-мерная ориентированная граница поверхности σ^m. В частности,

$$\int_{\breve{AB}}df=f(B)-f(A),$$

$$\int_{\sigma^2}\sum_{i<j}\left(\frac{\partial\omega_j}{\partial z_i}-\frac{\partial\omega_i}{\partial z_j}\right)dz_i\wedge dz_j=\oint_{\gamma=\partial\sigma^2}\sum_i\omega^i dz_i.$$

Лемма Пуанкаре. Если форма Θ замкнута: $d\Theta=0$, то она локально (в некоторой окрестности каждой точки) точна: $\Theta=d\Theta'$.