ОПРЕДЕЛЕНИЕ КАНОНИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ. *Каноническим*, или *симплектическим многообразием* называется пара $(\mathbf{M}^{2n}, \Omega)$, где $\mathbf{M}^{2n}$ — $2n$-мерное гладкое многообразие, а $\Omega(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ — заданная на всем $\mathbf{M}^{2n}$,
невырожденная —

(K1) $\Omega(\mathbf{a}, \mathbf{b})=0$ для всех $\mathbf{a}$, только если $\mathbf{b}=0$,

замкнутая —

(K2) $d\Omega\equiv 0$,

2-форма, называемая *канонической структурой*.

Упражнение. Пусть в локальных координатах $z_1, \ldots, z_{2n}$

$$\Omega=\sum_{i<j}\Omega_{ij}dz_i\wedge dz_j.$$

Представим эту форму в виде

$$\Omega=\frac{1}{2}\sum_{i,\,j}\Omega_{ij}dz_i\wedge dz_j,\quad \Omega_{ji}=-\Omega_{ij}. \tag{18.10}$$

Доказать, что (K1), (K2) эквивалентны требованиям

$$\det\|\Omega_{ij}\|\neq 0, \tag{18.11а}$$

$$\frac{\partial\Omega_{ij}}{\partial z_k}+\frac{\partial\Omega_{ki}}{\partial z_j}+\frac{\partial\Omega_{jk}}{\partial z_i}\equiv 0. \tag{18.11б}$$

ГАМИЛЬТОНОВЫ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

Лемма. Для любой гладкой функции $H:\mathbf{M}^{2n}\to\mathbf{R}$ существует векторное поле $\overleftarrow{H}$ такое, что для всякого касательного вектора $\mathbf{b}$

$$dH(\mathbf{b})=\Omega(\overleftarrow{H},\ \mathbf{b}) \tag{18.12}$$

(оно называется *гамильтоновым, порожденным функцией* H).

Доказательство. Каноническая структура на $\mathbf{M}^{2n}$ устанавливает изоморфизм между пространствами векторных полей и дифференциальных форм на $\mathbf{M}^{2n}$. Векторному полю $\mathbf{a}$ ставится в соответствие 1-форма $\Omega^{\mathbf{a}}$, определяемая соотношением

$$\Omega^{\mathbf{a}}(\mathbf{b})=\Omega(\mathbf{a},\mathbf{b}).$$

Это линейное соответствие взаимно-однозначно: если

$$(\Omega^{\mathbf{a}_1}-\Omega^{\mathbf{a}_2})(\mathbf{b})=\Omega(\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2,\ \mathbf{b})=0,\ \text{ то } \mathbf{a}_1=\mathbf{a}_2$$

в силу невырожденности. Поскольку пространства векторов и ковекторов в каждой точке имеют равные размерности, имеется обратное отображение; в частности, ковекторному полю dH соответствует искомое векторное поле $\overleftarrow{H}$ (короче, $\Omega^{\overleftarrow{H}}=dH$).

В локальных координатах положим

$$\mathbf{a}=\sum_{i=1}^{2n}A_i\frac{\partial}{\partial z_i},\quad \mathbf{b}=\sum_{i=1}^{2n}B_i\frac{\partial}{\partial z_i},\quad \overleftarrow{H}=\sum_{i=1}^{2n}Z_i\frac{\partial}{\partial z_i};$$