Доказательство. Пока еще не полученное тождество (18) перепишем:

$$\left.\begin{aligned}&((H, F), G)-((H, G), F)=(H, (F, G)),\\&\overleftarrow{G}(\overleftarrow{F}(H))-\overleftarrow{F}(\overleftarrow{G}(H))=(H, (F, G)),\\&[\overleftarrow{F}, \overleftarrow{G}](H)=\overleftarrow{(F, G)}(H).\end{aligned}\right\} \qquad (18.20)$$

В левую часть (18) входят слагаемые четырех сортов:

$$J\frac{\partial J}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial H}{\partial z}, \quad JJ\frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial^2 F}{\partial\,\partial z},$$

$$JJ\frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 G}{\partial z\partial z}, \quad JJ\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial z}\frac{\partial^2 H}{\partial z\partial z}$$

(индексы для краткости опущены). Все слагаемые последнего сорта (со вторыми производными H) поначалу стояли в левой части (20). После преобразований оказалось, что слева стоит производная функции H вдоль некоторого векторного поля, которая зависит только от первых производных. Следовательно, слагаемые последнего сорта взаимно уничтожаются. То же касается и слагаемых со вторыми производными F и G. Приходим к тому, что в левой части (18) стоят слагаемые только первого сорта. Более конкретно:

$$((F, G), H)+((H, F), G)+((G, H), F)=$$

$$=\sum_{a,\,b,\,c=1}^{2n}\left[((z_a, z_b), z_c)+((z_c, z_a), z_b)+((z_b, z_c), z_a)\right]\frac{\partial F}{\partial z_a}\frac{\partial G}{\partial z_b}\frac{\partial H}{\partial z_c},$$

так как в силу (16) и (17)

$$(F, G)=\sum_{a,\,b}(z_a, z_b)\frac{\partial F}{\partial z_a}\frac{\partial G}{\partial z_b}.$$

Выражение в квадратных скобках равно

$$\sum_m\left(\frac{\partial J_{ab}}{\partial z_m}J_{cm}+\frac{\partial J_{ca}}{\partial z_m}J_{mb}+\frac{\partial J_{bc}}{\partial z_m}J_{ma}\right)\equiv 0.$$

Чтобы убедиться в последнем, продифференцируем тождество $\sum_l J_{il}\Omega_{lj}=\delta_{ij}$ и получим

$$\sum_l\Omega_{jl}\frac{\partial J_{li}}{\partial z_k}+\sum_l J_{il}\frac{\partial\Omega_{lj}}{\partial z_k}=0,$$

$$\sum_{a,\,b}\Omega_{ai}\Omega_{jb}\frac{\partial J_{bl}}{\partial z_k}+\frac{\partial\Omega_{aj}}{\partial z_k}=0,$$

$$\sum_{a,\,b,\,m}\Omega_{ia}\Omega_{jb}\delta_{km}\frac{\partial J_{ab}}{\partial z_m}+\frac{\partial\Omega_{ij}}{\partial z_k}=0,$$