$$\sum_{a,\, b,\, c} \Omega_{ia}\Omega_{jb}\Omega_{kc}\left(\sum_m J_{cm}\frac{\partial J_{ab}}{\partial z_m}\right)+\frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial z_k}=0.$$

Осталось сослаться на (11б) и (11а).

Установив тождество (18), видим теперь, что третья строчка в (20) доказывает (19).

Следствие. Если $(F, G)\equiv\text{const}$, то поля $\overleftarrow{F}, \overleftarrow{G}$ коммутируют.

Примечания к теореме: 1) как и в § 16, гладкие функции образуют алгебру Ли относительно скобки Пуассона; отображение $\chi(F)=\overleftarrow{F}$ есть гомоморфизм ее в алгебру векторных полей; 2) если $J=\text{const}$, то доказательство (18) сводится к рассуждению о вторых производных. Это ситуация § 16.

ФУНКЦИИ В ИНВОЛЮЦИИ. Как и в § 16, это функции, скобка Пуассона которых тождественно равна нулю. Если $(F, G)\equiv 0$, то мы снова можем констатировать, что функция F есть первый интеграл поля $\overleftarrow{G}$ (и наоборот) в силу (15).

Теорема о фазовых торах. Если есть n независимых функций F_i, попарно находящихся в инволюции, то всякая неособая связная компактная компонента $\mathbf{L}_c$ их совместного уровня

$$\{F_1=c_1, \ldots, F_n=c_n\}$$

диффеоморфна n-мерному тору $\mathbf{T}^n$.

Здесь «неособая» значит, что

$$\operatorname{rang}\frac{\partial(F_1 \ldots, F_n)}{\partial(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots q_n)}=n \tag{18.21}$$

в каждой точке этой компоненты, так что $\mathbf{L}_c$ есть подмногообразие в $\mathbf{M}^{2n}$ размерности $2n-n=n$. Это ситуация «общего положения». Идейную нагрузку несет лишь условие компактности. В некотором смысле можно сказать, что сформулированная теорема описывает «достаточно типичный» феномен.

Доказательство. Условие $(F_i, F_j)\equiv 0$ имеет два последствия: во-первых, $[\overleftarrow{F_i}, \overleftarrow{F_j}]\equiv 0$, так что все векторные поля $\overleftarrow{F_i}$ коммутируют; во-вторых, $\overleftarrow{F_i}(F_j)\equiv 0$, так что все они касаются $\mathbf{L}_c$. Таким образом, на компактном n-мерном многообразии $\mathbf{L}_c$ есть n попарно коммутирующих векторных полей $\overleftarrow{F_i}$, которые к тому же линейно независимы в каждой точке в силу (21). Отсюда вытекает, что $\mathbf{L}_c$ диффеоморфен n-мерному тору $\mathbf{T}^n$. Дальнейшие рассуждения, в сущности, лежат уже вне гамильтонова формализма и составляют доказательство только что высказанного утверждения.

1. Пусть $z_0\in\mathbf{L}_c$; положим

$$g^s(z_0)=g_{F_n}^{s_n}\cdot\ldots\cdot g_{F_1}^{s_1}(z_0).$$