Поскольку потоки $g_{F_i}^{s_i}$ коммутируют, имеем групповое свойство:

$$g^{s+s'} = g^s \circ g^{s'}.$$

2. Отображение

$$h(s) = g^s(z_0), \quad h: \mathbf{R}^n \to \mathbf{L}_c,$$

является локальным диффеоморфизмом. В силу группового свойства локальную взаимную однозначность достаточно доказать в окрестности $s=0$, а это очевидно в силу основного свойства коммутирующих полей: собственно, $s=(s_1, ..., s_n) = h^{-1}(z)$ суть те самые координаты, в которых $\overleftarrow{F}_i = \frac{\partial}{\partial s_i}$. Наконец, множество $h[\mathbf{R}^n]$ одновременно замкнуто и открыто, так что совпадает с $\mathbf{L}_c$.

3. В целом отображение h не взаимно-однозначно. Мерой неоднозначности является множество $G = \{s : g^s(z_0) = z_0\}$, которое, очевидно, есть некоторая подгруппа аддитивной группы $\mathbf{R}_n$. Иными словами,

$$s, s' \in G \Rightarrow s + s' \in G. \tag{18.22}$$

4. В силу сказанного в п. 2 множество G дискретно. Это значит, что всякая ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ содержит лишь конечное число элементов G. Отсюда и из (22) вытекает, что G счетно.

5. Существуют векторы

$$\xi_1, ..., \xi_k \in G, \ k \leqslant n,$$

такие, что

$$G = \{m_1\xi_1 + ... + m_k\xi_k, \ m_i \in \mathbf{Z}\}.$$

С точки зрения теории групп $\mathbf{G}$ изоморфна прямому произведению k экземпляров группы целых чисел $\mathbf{Z}$. Отложим обоснование этого утверждения, чтобы поскорее получить тор.

6. Дополним множество $\xi_1, ..., \xi_k$ до базиса $\xi_1, ..., \xi_n$, положим $\xi_\alpha = \sum \xi_{\alpha i} e_i$ и введем на $\mathbf{L}_c$ векторные поля

$$X_\alpha = \sum_i \frac{1}{2\pi} \xi_{\alpha i} \overleftarrow{F}_i.$$

Эти поля, очевидно, коммутируют и линейно независимы. При $\alpha \leqslant k$ их фазовые потоки $g_{X^\alpha}^{\varphi_\alpha}$ обладают свойством периодичности:

$$g_{X_\alpha}^{2\pi} = g^0{}_{X_\alpha}.$$

Из построения 2—3 видно, что точки $\mathbf{L}_c$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с точками фактор-группы $\mathbf{R}^n/G$, т. е. множества

$$\mathbf{T}^k \times \mathbf{R}^{n-k} = \{\varphi_1 \bmod 2\pi, \ldots, \varphi_k \bmod 2\pi, \psi_{k+1}, \ldots, \psi_n\}.$$