Это соответствие является, очевидно, гладким (поскольку оно линейно в локальных координатах s_i на $\mathbf{L}_c$). Множество $\mathbf{T}^k \times \mathbf{R}^{n-k}$ компактно только при $k=n$, что и требовалось.

7. Теперь докажем утверждение п. 5. В этом пункте будут использованы два стандартных обозначения: $[\gamma]$ есть целая часть, $\{\gamma\}$ — дробная часть числа γ. Пусть k — максимальное число линейно независимых элементов G; не уменьшая общности, можно считать, что эти элементы суть $e_1, \ldots, e_k$. Это позволяет вести рассмотрение просто в k-мерном пространстве; теперь $G \subset \mathbf{R}^k$. Если $g=(g_1, \ldots, g_k) \in G$, то $(\{g_1\}, \ldots, \{g_k\}) \in G$ и лежит в единичном кубе. Но в силу дискретности G в нем лежат лишь конечное число элементов: поэтому существуют целые $l \neq m$ такие, что

$$\{lg_i\}=\{mg_i\},$$

или $(l-m)g_i=[lg_i]-[mg_i]$. Отсюда следует, что g_i — рациональные числа. Более того, они имеют общий знаменатель N в силу дискретности. Объем параллелепипеда, построенного на любых k линейно независимых векторах $\xi_1, \ldots, \xi_k$ из группы, не меньше $1/N^k$. Поэтому существуют такие наборы векторов, у которых этот объем минимален. Это и будут искомые: если элемент $g=\Sigma\gamma_i\xi_i$, $0 \leqslant \gamma_i \leqslant 1$, то, например,

$$\mathrm{vol}(\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}, g)=\gamma_k \,\mathrm{vol}(\xi_1, \ldots, \xi_k),$$

откуда $\gamma_k=0$ или 1.

Доказательство теоремы закончено. Добавим, что можно отказаться от условия компактности $\mathbf{L}_c$ и получить не тор, а цилиндр $\mathbf{T}^k \times \mathbf{R}^{n-k}$. Но для этого надо потребовать нестесненность полей $\overleftarrow{F}_i$ на $\mathbf{L}_c$.

§ 19. КАНОНИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

Локальные координаты

$$(z_1, \ldots, z_{2n})=(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$$

называются *каноническими*, если

$$\Omega=-\sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dq_i. \qquad (19.1)$$

Ненулевыми элементами матрицы коэффициентов Ω являются $\Omega_{i,n+i}=-1$, $\Omega_{n+i,i}=1$, так что

$$\|\Omega_{ij}\|=I, \; J=-I^{-1}=I, \qquad (19.2)$$

где I — симплектическая единица из § 17. Далее,

1) в каждом касательном пространстве имеем симплектическую структуру, причем векторные поля

$$\frac{\partial}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial p_n}, \frac{\partial}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial q_n}$$

в каждой точке образуют симплектический базис;