причем первые строчки суть преобразованные законы Ньютона $\left(H=T+V,\text{ так что } \dot{p}=-\frac{\partial V}{\partial q}+\dots\right)$. Видим, что

$$I=\begin{pmatrix}0 & -E\\ E & 0\end{pmatrix}.$$

Скобка Пуассона имеет вид, принятый в большинстве учебников:

$$(F,\ G)=\left(\frac{\partial F}{\partial p},\ \frac{\partial F}{\partial q}\right)\begin{pmatrix}0 & -E\\ E & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial G}{\partial p}\\ \frac{\partial G}{\partial q}\end{pmatrix}=\sum_i\left(-\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}+\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i}\right),$$

причем слагаемые со знаком минус поставлены первыми для того, чтобы p_i писать раньше q_i и одновременно F раньше G. Аналогично кососкалярное произведение и каноническая структура даются матричной формулой

$$\Omega(\mathbf{a},\ \mathbf{b})=(A_1,\dots,A_{2n})\begin{pmatrix}0 & -E_n\\ E_n & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ B_{2n}\end{pmatrix},$$

где базисные векторы, по которым раскладываются a и b, стоят в принятом нами порядке: $\frac{\partial}{\partial p_1},\ \dots,\ \frac{\partial}{\partial q_n}$. Отсюда

$$\Omega=-\sum_i dp_i\wedge dq_i,$$

причем знак минус опять поставлен для того, чтобы импульсы написать первыми. Отметим случаи «не тех знаков»:

$$\overleftarrow{H}(F)=(F,\ H),$$
$$(p_i,\ q_i)=-1.$$

Наконец, мы имеем

$$[\overleftarrow{F},\ \overleftarrow{G}]=\overleftarrow{(F,\ G)}$$

за счет того, что скобка Ли

$$[X,\ Y]=YX-XY$$

(в большинстве учебников знак другой).

Теперь нам надо увериться в том, что канонические координаты существуют всегда. Мы сделаем это в два этапа.

ЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА О ПОПОЛНЕНИИ. *Пусть имеется n независимых функций в инволюции:*

$$(\Phi_i,\ \Phi_j)\equiv 0,\ i=1,\ \dots,\ n. \tag{19.4}$$

Тогда существуют еще n функций $\Psi_1,\ \dots,\ \Psi_n$ таких, что набор $(\Phi_1,\ \dots,\ \Phi_n,\ \Psi_1,\ \dots,\ \Psi_n)$ *является канонической системой координат* (в частности, функции Ψ_i также попарно в инволюции).