Доказательство. Поскольку $[\overleftarrow{\Phi}_i, \overleftarrow{\Phi}_j] = \overleftarrow{(\Phi_i, \Phi_j)} \equiv 0$, в силу основного свойства коммутирующих полей существуют такие координаты $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n$, что $\overleftarrow{\Phi}_i = \frac{\partial}{\partial \xi_i}$. Отсюда

$$(\xi_i, \Phi_j) = \overleftarrow{\Phi}_j(\xi_i) = \frac{\partial \xi_i}{\partial \xi_j} = \delta_{ij}. \qquad (19.5)$$

Лемма о невырожденности. Пусть $2n$ функций $\zeta_1, \ldots, \zeta_{2n}$ имеют невырожденную матрицу попарных скобок Пуассона:

$$((\zeta; \zeta)) = \|(\zeta_i, \zeta_j)\|.$$

Тогда невырождена матрица Якоби этих функций

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = \left\| \frac{\partial \zeta_j}{\partial z_i} \right\|,$$

и их можно принять за координаты. В самом деле, из (18.16)

$$((\zeta, \zeta)) = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)^* J \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right), \ \det J \neq 0.$$

В нашем частном случае в силу (4) и (5) невырождена матрица

$$((\Phi, \xi; \Phi, \xi)) = \begin{Vmatrix} 0 & -E \\ E & \Lambda \end{Vmatrix}, \ \Lambda = ?. \qquad (19.6)$$

Дальнейшее рассмотрение поведем в координатах $\Phi_1, \ldots, \Phi_n, \xi_1, \ldots, \xi_n$. Уточним структуру матрицы Λ в (6). Заметим, что

$$(\xi_i, \xi_j) = \lambda_{ij}(\Phi),$$

так как в силу тождества Пуассона и (5)

$$\frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial \xi_k} = ((\xi_i, \xi_j), \Phi_k) = -((\Phi_k, \xi_i), \xi_j) + ((\Phi_k, \xi_j)\xi_i) =$$
$$= (\delta_{ki}, \xi_i) - (\delta_{kj}, \xi_i) \equiv 0.$$

В координатах Φ, ξ матрица J равна (6). Поэтому

$$\|\Omega_{ij}\| = -J^{-1} = \begin{Vmatrix} -\Lambda & -E \\ E & 0 \end{Vmatrix},$$

$$\Omega = -\sum_i d\Phi_i \wedge d\xi_i - \sum_{i<j} \lambda_{ij}(\Phi)\, d\Phi_i \wedge d\Phi_j.$$

Первое слагаемое само по себе есть замкнутая форма (ср. с (3)). Следовательно, замкнутой формой является и второе слагаемое:

$$\sum_{i<j} \lambda_{ij} d\Phi_i \wedge d\Phi_j = d\left(\sum_i f_i(\Phi)\, d\Phi_i\right).$$

Форма Ω приводится к виду

$$\Omega = d\left(\sum_i \xi_i d\Phi_i\right) - d\left(\sum_i f_i d\Phi_i\right) = d\left(\sum_i \left(\xi_i - f_i(\Phi)\right) d\Phi_i\right).$$