Осталось положить

$$\Psi_i=\xi_i-f_i(\Phi), \tag{19.7}$$

и мы получим искомые канонические координаты.

Примечание на будущее. Если в выражении функции $\varphi(\Phi, \xi)$ мы сделаем замену (7), то, очевидно, $\frac{\partial\varphi}{\partial\Psi_i}=\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_i}$. Отсюда

$$\overleftarrow{\Phi}_i=\frac{\partial}{\partial\Psi_i} \tag{19.8}$$

в координатах Φ, Ψ.

ТЕОРЕМА ДАРБУ. *В окрестности каждой точки канонического многообразия существуют канонические координаты.*

Доказательство. Нам достаточно убедиться в локальном существовании n функций в инволюции. Но справедливо даже более сильное индуктивное утверждение:

если имеется $k<n$ независимых функций в инволюции $\Phi_1, \ldots$ $\ldots, \Phi_k$, то существует независимая от них Φ_{k+1} такая, что $(\Phi_i, \Phi_{k+1})\equiv 0$ (ясно, что одну функцию в инволюции мы всегда можем предъявить, поскольку $(\Phi, \Phi)\equiv 0$). Действительно, в некоторых координатах $\xi_1, \ldots, \xi_k, \eta_1, \ldots, \eta_{2n-k}$ имеем, как и выше, $\overleftarrow{\Phi}_i=\frac{\partial}{\partial\xi_i}$. При этом

$$\Phi_i=\Phi_i(\eta_1, \ldots, \eta_{2n-k}),$$

в силу того что

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial\xi_j}=\overleftarrow{\Phi}_j(\Phi_i)=(\Phi_i, \Phi_j)\equiv 0.$$

Поскольку $k<2n-k$, существует функция $\Phi_{k+1}(\eta)$, независимая с $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$. Тогда

$$(\Phi_{k+1}, \Phi_i)=\frac{\partial\Phi_{k+1}}{\partial\xi_i}\equiv 0,$$

что и требовалось.

ЛЕММА КАРАТЕОДОРИ. Рассмотрим замену переменных

$$P_k=q_k,\ Q_k=-p_k,\ k=j_1, \ldots, j_m, \tag{19.9}$$
$$P_k=p_k,\ Q_k=q_k,\ k\neq j_1, \ldots, j_m.$$

Ясно, что переменные P, Q — тоже канонические. Замена называется *канонической перестановкой по индексам* $j_1, \ldots, j_m$.

Если есть n функций в инволюции $F_1, \ldots, F_n$, независимых в точке z, то в ее окрестности существует такая каноническая перестановка, что в новых переменных

$$\det\frac{\partial F}{\partial P}=\det\left\|\frac{\partial F_i}{\partial P_j}\right\|\neq 0. \tag{19.10}$$