Доказательство. Матрица Якоби в точке z

$$\frac{\partial F}{\partial(p, q)} = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial F_1}{\partial p_1} & & \frac{\partial F_n}{\partial p_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial p_n} & & \frac{\partial F_n}{\partial p_n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial F_1}{\partial q_1} & & \frac{\partial F_n}{\partial q_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial q_n} & & \frac{\partial F_n}{\partial q_n} \end{matrix} \right\| \qquad (19.11)$$

имеет ранг n. Следовательно, у нее есть невырожденные миноры порядка n (хотя бы один) вида

$$\frac{\partial F}{\partial(p_{i_1} \ldots, p_{i_l}, q_{j_1}, \ldots, q_{j_m})}, \quad l+m=n.$$

Существо леммы в том, что можно подобрать минор так, чтобы

$$i_\alpha \neq j_\beta.$$

Вообще, невырожденный минор любой матрицы M можно искать методом окаймления: выстраивается цепочка невырожденных миноров

$$M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_k \subset \ldots \subset M_n,$$

причем в качестве M_1 можно взять любой ненулевой элемент матрицы M. В нашем случае мы знаем, что ранг матрицы (11) максимален, так что ненулевой элемент имеется в первом столбце. Далее, минор M_2 можно выбрать из первых двух столбцов, M_3 — из первых трех и т. д. Будем действовать методом окаймления, но с дополнительным условием: если к минору M_k присоединяется часть строки $\frac{\partial F}{\partial p_i}$ или $\frac{\partial F}{\partial q_j}$ (и, разумеется, часть $(k+1)$-го столбца), то дополнительно будем вычеркивать всю строку $\frac{\partial F}{\partial q_i}$ или $\frac{\partial F}{\partial p_j}$ соответственно (в этом и состоит эффективное наращивание непересекающихся множеств $\{i_\alpha\}$ и $\{j_\beta\}$).

Допустим, что таким методом мы не сможем получить ненулевого минора порядка n. С точностью до канонической перестановки это значит, что

$$\det \frac{\partial(F_1, \ldots, F_k)}{\partial(p_1, \ldots, p_k)} \neq 0 \qquad (19.12)$$

и

$$\operatorname{rang} \frac{\partial(F_1, \ldots, F_n)}{\partial(p_1, \ldots, p_n, q_{k+1}, \ldots, q_n)} = k < n. \qquad (19.13)$$