Зафиксируем произвольно $q_1, \ldots, q_k$. Утверждения (12), (13) означают, что сужения функций F_i на подмногообразия $q_1, \ldots, q_k = \mathrm{const}$ зависимы, так что

$$F_{k+i} = \varphi_i(F_1, \ldots, F_k, q_1, \ldots, q_k),$$

где φ_i — некоторые гладкие функции. Вычислим теперь скобки Пуассона:

$$(F_{k+i}, F_\alpha) = \sum_{\mu=1}^{k} \frac{\partial\varphi_i}{\partial F_\mu}(F_\mu, F_\alpha) + \sum_{\mu=1}^{k} \frac{\partial\varphi_i}{\partial q_\mu}(q_\mu, F_\alpha) = \sum_{\mu=1}^{k} \frac{\partial\varphi_i}{\partial q_\mu}\frac{\partial F_\alpha}{\partial p_\mu} \equiv 0.$$

В силу (12) отсюда следует, что $\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial q_\mu} \equiv 0$, так что

$$F_{k+i} = \varphi_i(F_1, \ldots, F_k).$$

Это значит, что функции $F_1, \ldots, F_n$ зависимы. Противоречие.

§ 20. КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. ЭФФЕКТИВНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Инвариантная точка зрения на гладкое многообразие состоит в том, что как множество точек оно существует независимо от тех систем координат (карт), которые на нем могут быть заданы. Допустим, что в некоторой области $\mathcal{U} \subset \mathfrak{M}$ система координат имеется; тогда каждая точка $P \in \mathcal{U}$ становится обладательницей своего собственного набора чисел; с помощью алгольного символа это можно записать в виде $P := (z_1, \ldots, z_k)$. Если угодно, систему координат можно представлять себе как прозрачную пленку с сеткой линий, накладываемую на поверхность; преимущественно такого взгляда мы будем придерживаться.

Термин «преобразование» двусмыслен. Он применяется в обстоятельствах двух типов:

1. «Одна карта и две точки»: имеется взаимно-однозначное отображение φ многообразия $\mathfrak{M}$ в себя, и мы воспользовались системой координат с областью определения $\mathcal{U}$. Пусть область $\mathcal{D}$ и множество $\varphi[\mathcal{D}]$ лежат в $\mathcal{U}$, так что точки

$$P := (z_1, \ldots, z_k) \in \mathcal{U},$$

$$P' = \varphi(P) := (z_1', \ldots, z_k') \in \mathcal{U}.$$

Тогда в пределах $\mathcal{D}$ существуют гладкие обратимые зависимости

$$z_i' = \varphi_i(z_1, \ldots, z_k). \qquad \text{(A)}$$

Про них говорят, что они локально задают отображение.

2. «Одна точка и две карты»: рассматриваются две системы координат с областями определения $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$; следовательно,

$$P := (z_1, \ldots, z_k),\ P := (\zeta_1, \ldots, \zeta_k)$$

в области $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, и в ней существуют гладкие обратимые зависи-