мости

$$\zeta_i=\psi_i(z_1, \ldots, z_k). \tag{Б}$$

Про них говорят, что имеется замена переменных.

Эти два прочтения термина «преобразование» взаимозаменяемы: в самом деле, формулы (А), задающие преобразование, можно использовать для задания новых координат и, наоборот, правые части формул (Б) можно применить для задания некоторого отображения (тривиальные уточнения формулировок опустим). Тем не менее полезно всякий раз ясно представить себе, что именно имеется в виду.

КАНОНИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ. Пусть есть каноническое многообразие ($\mathbf{M}^{2n}$, Ω) и его отображение в себя: $\varphi:\mathbf{M}\to\mathbf{M}$. Можно определить обратный образ $\varphi^*\Omega$ формы Ω. В терминах интегрирования

$$\int_{\sigma^2}\varphi^*\Phi=\int_{\varphi(\sigma^2)}\Omega$$

для каждой двумерной ориентированной поверхности $\sigma^2\subset\mathbf{M}^{2n}$. Вычисляется $\varphi^*\Omega$ так (в канонических координатах):

$$\Omega=-\Sigma dp_i\wedge dq_i, \tag{20.1}$$

$$\varphi^*\Omega=-\Sigma dp'_i\wedge dq'_i,$$

где $p_i'=p_i'(p, q)$, $q_i'=q_i'(p, q)$ — формулы, локально задающие преобразование. В (1) надо выписать все полные дифференциалы и привести подобные члены.

Определение. Отображение φ называется *каноническим*, если

$$\varphi^*\Omega=\Omega. \tag{20.2}$$

Вспомним, что $\Omega=-d\omega$, где $\omega=p\cdot dq=\Sigma p_idq_i$. Пусть $\gamma=\partial\sigma^2$. По формуле Стокса имеем

Критерий каноничности. *Для любого замкнутого контура $\gamma\subset\mathbf{M}$ в области определения координат p, q должно быть*

$$\int_\gamma p\cdot dq=\int_{\varphi(\gamma)}p\cdot dq. \tag{20.3}$$

Пример. Назовем *сдвигом* преобразование

$$p_i'=p_i,\ q_i'=q_i-f_i(p, q).$$

Условие (3) приобретает вид $\int_\gamma \Sigma f_i(p, q)\,dp_i\equiv 0$, т. е. подынтегральное выражение должно быть полным дифференциалом:

$$\frac{\partial f_i}{\partial q_\alpha}\equiv 0,\quad \frac{\partial f_i}{\partial p_j}\equiv\frac{\partial f_j}{\partial p_i},$$

или

$$f_i=\frac{\partial\varphi(p)}{\partial p_i}. \tag{20.4}$$