Теорема. *Фазовый поток g_H^t гамильтонова векторного поля H состоит из канонических отображений.*

Доказательство. Условие каноничности принимает вид

$$I(t)=\int\limits_{g_H^t[\gamma]} p\cdot dq=\int\limits_{\gamma} p\cdot dq=I(0)\Longleftrightarrow\frac{dI}{dt}\equiv 0.$$

Пусть

$$g_H^t[\gamma]=\{p=p(s,t),\ q=q(s,t): s\in[0,l],\ p(0,t)= \\ =p(l,t),\ q(0,t)=q(l,t)\}.$$

Проведем явные вычисления (достаточно вычислить $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}$):

$$\frac{dI}{dt}=\frac{d}{dt}\int_0^l\sum_i p_i(s,t)\frac{\partial q_i(s,t)}{\partial s}ds=\int_0^l\left[\sum\frac{\partial p_i}{\partial t}\frac{\partial q_i}{\partial s}+\right.$$

$$\left.+\sum p_i\frac{\partial q_i}{\partial t\partial s}\right]ds=\int_0^l\sum\frac{\partial p_i}{\partial t}\frac{\partial q_i}{\partial s}ds+\int_0^l\sum p_i d\frac{\partial q_i}{\partial t}=$$

$$=\int_0^l\sum\left[\frac{\partial p_i}{\partial t}\frac{\partial q_i}{\partial s}-\frac{\partial q_i}{\partial t}\frac{\partial p_i}{\partial s}\right]ds+\Sigma p_i\frac{\partial q_i}{\partial t}\Big|_0^l.$$

Последнее слагаемое равно нулю, поскольку контур γ — замкнутый. Согласно уравнениям Гамильтона,

$$\left.\frac{\partial p_i}{\partial t}\right|_{t=0}=-\left.\frac{\partial H}{\partial q_i}\right|_{p(s,0),\,q(s,0)},\quad \frac{\partial q_i}{\partial t}=\left.\frac{\partial H}{\partial p_i}\right|_{p(s,0),\,q(s,0)},$$

откуда

$$\frac{dI}{dt}=\int_0^l\sum\left(-\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial q_i}{\partial s}-\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial s}\right)ds=0.$$

Проделанное рассуждение — маленький фрагмент теории интегральных инвариантов Пуанкаре.

КАНОНИЧЕСКИЕ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННЫХ. Замена переменных

$$P=P^*(p,q),\quad Q=Q^*(p,q) \tag{20.5}$$

называется *канонической*, если переменные P, Q — снова канонические, как и переменные p, q:

$$\sum_i dp_i\wedge dq_i=-\Omega=\sum_i dP_i\wedge dQ_i. \tag{20.6}$$

Критерии каноничности. *Замена (5) является канонической тогда и только тогда, когда*