а) *скобка Пуассона вычисляется по одним и тем же формулам в обеих системах координат, т. е.*

$$\sum_i\left(-\frac{\partial F}{\partial P_i}\frac{\partial G}{\partial Q_i}+\frac{\partial F}{\partial Q_i}\frac{\partial G}{\partial P_i}\right)=\sum_i\left(-\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i}+\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i}\right);$$

б) *матрица Якоби*

$$\mathscr{D}=\frac{\partial(P,\,Q)}{\partial(p,\,q)}$$

является симплектической.

Доказательство (а) следует из инвариантного определения скобки Пуассона (18.14) и последующей формулы (18.16). Что касается (б), то оба базиса:

$$\frac{\partial}{\partial p_1},\ \ldots,\ \frac{\partial}{\partial q_n};\ \frac{\partial}{\partial P_1},\ \ldots,\ \frac{\partial}{\partial Q_n}$$

являются симплектическими, так что матрица Якоби $\mathscr{D}$, которая их связывает, тоже является симплектической (матрица Якоби определена с точностью до транспонирования, однако, как мы знаем, при этой операции симплектичность матрицы сохраняется, см. § 17).

Пример канонической замены — перестановка (19.9).

ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИЯ. Воспользуемся соображениями взаимности отображений и замен. Сопоставляя формулы (1) и (6), мы видим, что они идентичны, так что доказанные критерии каноничности после должной переформулировки годятся и для замен, и для отображений. В частности, замена (5) является канонической тогда и только тогда, когда для любого контура

$$\int_\gamma p\cdot dq=\int_\gamma P^*\cdot dQ^*$$

или

$$P^*\cdot dQ^*-p\cdot dq=d\Pi(p,\ q), \tag{20.7}$$

где $\Pi(p,\ q)$ — некоторая функция, называемая *первообразной.*

Пример. *Канонические полярные координаты* на плоскости $\mathbb{R}^2(p,\ q)$ задаются формулами:

$$\rho=\frac{p^2+q^2}{2},\quad \sigma=\operatorname{arctg}\frac{q}{p}.$$

Имеем

$$d\sigma=\frac{1}{1+\frac{q^2}{p^2}}\,\frac{pdq-qdp}{p^2}=\frac{pdq-qdp}{p^2+q^2},$$

$$\rho d\sigma-pdq=\frac{1}{2}(pdq-qdp)-pdq=d\left(-\frac{pq}{2}\right),$$

$$\Pi=-\frac{pq}{2}.$$