Термин «первообразная канонической замены переменных» в настоящих лекциях введен впервые. По всей видимости, это понятие до сих пор не выделялось, хотя инкогнито первообразные функции и появлялись в литературе, начиная с работ Пуанкаре.

СМЕШАННАЯ ЗАПИСЬ СТАНДАРТНОЙ ЗАМЕНЫ. Каноническая замена переменных называется *стандартной*, если

$$\det \frac{\partial P^*}{\partial p} \neq 0. \tag{20.8}$$

Опираясь на условие (8), из уравнения $P=P^*(p, q)$ выразим $p=\bar{p}(P, q)$ и подставим в $Q=Q^*(p, q)$. В итоге получим *смешанные формулы замены:*

$$\begin{aligned} p&=\bar{p}(P, q), \\ Q&=\bar{Q}(P, q). \end{aligned} \tag{20.9}$$

Тождество (7) выразим через независимые переменные P, q:

$$\bar{p}\cdot dq - P\cdot d\bar{Q} = -d\Pi(\bar{p}(P, q), q),$$

$$\bar{p}\cdot dq + \bar{Q}\cdot dP = d\,\underbrace{[\bar{Q}\cdot P - \Pi(\bar{p}(P, q), q)]}_{S(P, q)}$$

где $\bar{Q}\cdot P=\sum\limits_i \bar{Q}_i P_i$. Отсюда

$$\bar{p}=\frac{\partial S}{\partial q}, \quad \bar{Q}=\frac{\partial S}{\partial P}, \tag{20.10}$$

так что смешанные формулы замены порождаются одной функцией, которая называется *производящей*, и удовлетворяют условию, равносильному (5):

$$\det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial P \partial q} \right\| \neq 0. \tag{20.11}$$

Обратно, если это условие выполнено, то формулы

$$p=\frac{\partial S(P, q)}{\partial q}, \quad Q=\frac{\partial S(P, q)}{\partial P},$$

будут смешанными для некоторой стандартной замены.

По лемме Каратеодори любая каноническая замена переменных может быть превращена в стандартную несколькими каноническими перестановками. Аппарат производящих функций в этом смысле универсален.

Пример. Снова канонические полярные координаты

$$\rho=\frac{p^2+q^2}{2}, \quad \sigma=\operatorname{arctg}\frac{q}{p}.$$

Здесь производящая функция

$$S=\frac{q}{2}\sqrt{2\rho-q^2}+\rho\operatorname{arctg}\frac{q}{\sqrt{2\rho-q^2}}.$$