З а д а ч а 57. Пусть $\zeta = Sz$ — стандартная линейная каноническая замена (S — симплектическая матрица):

$$S = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}, \ \det D \neq 0; \ \zeta = (P, Q).$$

Доказать, что:

1) $\Pi(p, q) = \frac{1}{2}(p \cdot q - P \cdot Q)$;

2) $S(P, q) = P \cdot D^{-1} q + \frac{1}{2} P \cdot CD^{-1} P - \frac{1}{2} q \cdot D^{-1} Bq$.

У к а з а н и я. Использовать условия на A, B, C, D, полученные ранее (в начале § 17); решить задачу сначала в случае $n=1$, т. е. когда A, B, C, D — числа.

ПРИМЕНЕНИЕ КАНОНИЧЕСКИХ ЗАМЕН. Векторное поле $\overleftarrow{H}$ построено инвариантным образом; в локальных канонических координатах его можно записать так: $I \frac{\partial H'}{\partial z}$ или $I \frac{\partial H''}{\partial \zeta}$. При этом $H''(\zeta) = H'(z_*(\zeta))$, где H' и H'' — конкретные выражения в координатах z и ζ. При канонической замене координат $z = z_*(\zeta)$ уравнение Гамильтона $\frac{dz}{dt} = I \frac{\partial H'}{\partial z}$ переходит в $\frac{d\zeta}{dt} = I \frac{\partial H''}{\partial \zeta}$.

Таким образом, мы сначала делаем замену переменных в гамильтониане, потом дифференцируем, но не преобразуем сами уравнения. Этим канонические замены выгодно отличаются от произвольных.

Пусть нам известны выражения H в различных локальных координатах: $H = H'(p, q)$, $H = H''(P, Q)$. Применяя смешанные формулы замены, имеем $H'(\bar{p}(P, q), q) = H''(P, Q(P, q))$ или, используя производящую функцию,

$$H'\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q\right) = H''\left(P, \frac{\partial S}{\partial P}\right). \tag{20.12}$$

Таким образом, $S(P, q)$ удовлетворяет некоторому уравнению в частных производных, которое называется *уравнением Гамильтона—Якоби*.

З а д а ч а 58. Путем решения уравнения вида (12):

$$\frac{1}{2}\left(\alpha \left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + 2\gamma \frac{\partial S}{\partial q} q + \beta q^2\right) = \frac{1}{2}\left(P^2 + \mu \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)^2\right), \quad \alpha > 0,$$

найти все стандартные линейные канонические замены переменных, осуществляющие приведение к нормальной форме из задачи 55.

У к а з а н и е: получаются формулы

$$c = \pm \sqrt{\frac{\alpha - d^2}{\alpha\beta - \gamma^2}}, \quad b = \frac{1}{\alpha}\left(\gamma d \pm \sqrt{(\alpha\beta - \gamma^2)(\alpha - d^2)}\right),$$

которые надо проанализировать, в частности, в зависимости от