знака $\mu=\alpha\beta-\gamma^2$. Полезно предварительно описать замены, сохраняющие нормальную форму.

Уже отмечалось, что состояния равновесия гамильтоновой системы — это критические точки гамильтониана. Если в окрестности равновесия $p=q=0$ разложить H в ряд Тейлора: $H=H_2+$ $+H_3+\ldots$, где H_k — сумма членов степени k, то гамильтониан H_2 даст линейные уравнения, являющиеся приближением для исходных. Сейчас мы увидим, как канонические замены позволяют улучшать качество приближения.

Задача 59. А. Пусть $n=1$, и критическая точка имеет в линейном приближении гиперболический тип:

$$H=\lambda pq+\sum_{m+n=3}\eta_{mn}p^mq^n+O(p^4+q^4).$$

Найти производящую функцию канонической замены переменных, приводящей гамильтониан к виду

$$H=\lambda PQ+O(P^4+Q^4).$$

Б. Аналогичное задание для точки эллиптического типа:

$$H=\frac{1}{2}(p^2+\mu q^2)+\sum_{m+n=3}\eta_{mn}p^mq^n+O(p^4+q^4),\quad \mu>0.$$

Таким образом, в переменных P, Q линейное приближение на порядок точнее.

Ответ А:

$$S=Pq+\sum\frac{\eta_{mn}}{\lambda(r-m)}q^mP^n.$$

Здесь мы увидели простейшие примеры *преобразования Биркгофа.*

Итак, канонические замены применяются для улучшения гамильтонианов. Пойдем дальше и пожелаем теперь, чтобы H'' не зависело от Q, т. е. чтобы

$$H'\left(\frac{\partial S}{\partial q},\ q\right)=H''(P). \tag{20.12'}$$

Если мы решим это уравнение в частных производных и осуществим замену, то в новых переменных гамильтонова система легко интегрируется:

$$\begin{gathered}\frac{dP_i}{dt}=-\frac{\partial H''}{\partial Q_i}=0\Rightarrow P_i=P^0{}_i=\text{const},\\ \frac{dQ_i}{dt}=\frac{\partial H''}{\partial P_i}=\omega_i(P)\Rightarrow Q_i=Q^0{}_i+\omega_i(P^0)t.\end{gathered} \tag{20.13}$$

ЭФФЕКТИВНОЕ ПОПОЛНЕНИЕ. В § 19 была доказана теорема о пополнении: если есть n независимых функций в инволюции $P_1, \ldots, P_n$, то существуют еще n функций $Q_1, \ldots, Q_n$ таких,