что (P, Q) — канонические координаты. То была теорема существования, а сейчас нам потребуется в каком-то смысле эффективный способ построения функций Q_i. Будем исходить из дополнительного предположения о том, что какие-то канонические координаты p, q в нашем распоряжении уже имеются.

По лемме Каратеодори можно считать $\det \frac{\partial P}{\partial p} \neq 0$. Следовательно, локально $p = \bar{p}(P, q)$. Вычислим функцию

$$S(p, q) = \int_{q_0}^{q} \bar{p}(P, q)\, dq \tag{20.14}$$

(ниже будет показано, что интеграл не зависит от пути интегрирования). Отметив, что $\det \frac{\partial^2 S}{\partial P \partial q} = \det \frac{\partial \bar{p}}{\partial P} \neq 0$, мы можем использовать S в качестве производящей. Функции

$$\bar{Q}(P, q) = \frac{\partial S}{\partial P} = \int_{q_0}^{q} \frac{\partial \bar{p}}{\partial P}\, dq,$$

$$Q^*(p, q) = \bar{Q}(P(p, q), q)$$

и будут искомыми.

Покажем теперь корректность определения S. Функции $\bar{p}$ фактически задают в виде графика совместные уровни $\mathbf{L}_P = \{P = \text{const}\}$, т. е. локально

$$\mathbf{L}_P = \{p = \bar{p}(P, q)\}.$$

Таким образом,

$$\int_{q_0}^{q} \bar{p} \cdot dq = \int_{\gamma} p \cdot dq,$$

где γ — путь из q_0 в q, поднятый на $\mathbf{L}_P$ функциями $\bar{p}$. Докажем, что интеграл не зависит от контура или, что то же самое, интеграл по замкнутому контуру равен нулю.

Способ 1 (для тех, кто знаком с понятием сужения дифференциальной формы на подмногообразие). Пусть $\gamma = \partial \sigma^2$, $\sigma^2 \subset \mathbf{L}_P$. По теореме Стокса:

$$\int_{\gamma} (p \cdot dq)_{\mathbf{L}_P} = \int_{\sigma^2} d\,[(p \cdot dq)_{\mathbf{L}_P}] = \int_{\sigma^2} (d\,(p \cdot dq))_{\mathbf{L}_P} = -\int_{\sigma^2} (\Sigma dp_i \wedge dq_i)_{\mathbf{L}_P}.$$

Осталось проверить, что

$$\Omega|_{\mathbf{L}_P} = -\Sigma dp_i \wedge dq_i|_{\mathbf{L}_P} \equiv 0.$$

Векторные поля $\overleftarrow{P}_1, \ldots, \overleftarrow{P}_n$ линейно независимы и касаются $\mathbf{L}_P$, $\dim \mathbf{L}_P = n$; кроме того (еще одно следствие инволютивности),

$$\Omega(\overleftarrow{P}_i, \overleftarrow{P}_j) = (P_i, P_j) \equiv 0,$$