что и доказывает требуемое.

Способ 2 (непосредственный). Покажем, что

$$\frac{\partial \bar{P}_k}{\partial q_i}=\frac{\partial \bar{P}_i}{\partial q_k}. \tag{20.15}$$

Поскольку $P_\alpha^*(\bar{p}(P, q), q)\equiv P_\alpha$, после дифференцирования

$$\frac{\partial P^*_\alpha}{\partial q_i}+\sum_s \frac{\partial P^*_\alpha}{\partial p_s}\frac{\partial \bar{p}_s}{\partial q_i}\equiv 0. \tag{20.16}$$

Условие $(P_\alpha^*, P_\beta^*)\equiv 0$ можно представить в виде

$$\sum_j \frac{\partial P^*_\alpha}{\partial p_j}\frac{\partial P^*_\beta}{\partial q_j}=\sum_k \frac{\partial P^*_\beta}{\partial p_k}\frac{\partial P^*_\alpha}{\partial q_k},$$

откуда в силу (16)

$$\sum_{j,\,k} \frac{\partial P^*_\alpha}{\partial p_j}\frac{\partial P^*_\beta}{\partial p_k}\frac{\partial \bar{p}_k}{\partial q_j}=\sum_{k,\,j} \frac{\partial P^*_\beta}{\partial p_k}\frac{\partial P^*_\alpha}{\partial p_j}\frac{\partial \bar{p}_j}{\partial q_k},$$

$$\sum_{j,\,k} \frac{\partial P^*_\alpha}{p p_j}\left(\frac{\partial \bar{p}_k}{\partial q_j}-\frac{\partial \bar{p}_j}{\partial q_k}\right)\frac{\partial P^*_\beta}{\partial p_k}\equiv 0.$$

Здесь мы видим, что матрица

$$\left\|\frac{\partial \bar{P}_k}{\partial q_j}-\frac{\partial \bar{P}_j}{\partial q_k}\right\| \tag{20.17}$$

множится с одной стороны на невырожденную матрицу

$$\left\|\frac{\partial P^*_\alpha}{\partial p_j}\right\|,$$

а с другой — на транспонированную к ней. В итоге получается нулевая матрица. Следовательно, и сама матрица (17) равна нулю, что и доказывает (15).

Теорема о пополнении, как и все другие локальные теоремы, на практике часто эффективна отнюдь не в малых областях — неформальное обстоятельство, определяющее ее ценность (как и всех других локальных теорем).

СВОЙСТВО ИНТЕГРИРУЕМОСТИ. Поле $\overleftarrow{H}$ (или уравнение $\dot{z}=I\dfrac{\partial H}{\partial z}$ называется *вполне интегрируемым* в некоторой области, если в ней у него есть n независимых первых интегралов в инволюции $F_1, ..., F_n$, т. е. $(F_i, H)\equiv 0$, $(F_i, F_j)\equiv 0$, и $\operatorname{rang}\dfrac{\partial F}{\partial z}=n$ везде, кроме множества точек, не содержащего никакой открытой подобласти.

К числу интегрируемых (во всем фазовом пространстве) относятся задачи с n степенями свободы и n—1 циклическим интегралом (движение в центральном поле сил, сферический маятник, случай Лагранжа, лиувиллевы системы — задача о геодезичес-