ких на эллипсоиде, задача двух неподвижных центров, задача Лагранжа). Здесь список интегралов нам уже известен (§ 16, 8, 9). Менее очевиден набор интегралов в инволюции для задач с тремя степенями свободы и интегралом кинетического момента: задача Кеплера, вообще движение в центральном поле сил (см. задачу 51, в) и случай Эйлера вращения твердого тела. Здесь интегралами в инволюции являются полная энергия, одна из компонент кинетического момента и квадрат его модуля.

Возьмем в качестве первых n канонических координат функции $P_i = F_i(z)$, а еще n функции Q построим по теореме о пополнении. Тогда

$$H = H''(P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n).$$

Но функции P_i — это первые интегралы поля $\overleftarrow{H}$, так что

$$\frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial H''}{\partial Q_i} \equiv 0.$$

Следовательно, выражение H'' зависит только от переменных P. В частности, если интегралы выписаны в канонической системе координат p, q, то пополнение мы сможем произвести эффективно, т. е. решим уравнение Гамильтона—Якоби (12′).

Теорема Лиувилля. Если система уравнений Гамильтона имеет n первых интегралов в инволюции, то она интегрируется в квадратурах: при помощи алгебраических операций, обращения функций, интегрирования и дифференцирования (для доказательства достаточно посмотреть, что делалось выше при эффективном пополнении).

Еще раз о локальности. Теорема Лиувилля, равно как и предыдущие теоремы, формально носит сугубо локальный характер. Из доказательства теоремы Дарбу следует, что всякая гамильтонова система вполне интегрируема в окрестности любой неособой своей точки. На практике, однако, нас не интересует потенциальное и бессодержательное существование интегралов в малом. Нам важны случаи, когда явно предъявляются первые интегралы движения, определенные во всем или почти всем фазовом пространстве задачи. Вместе с тем, поскольку на практике мы всегда имеем дело с аналитическими функциями, поведение которых в целом, как известно, определяется поведением в малом, то, опираясь на локальные теоремы, мы сможем в конце концов получать заключения нелокального характера о фазовом потоке.

ПЕРЕМЕННЫЕ ДЕЙСТВИЕ — УГОЛ. Пусть $\mathbf{L}_c$ — неособая связная компактная компонента совместного уровня интегралов вполне интегрируемой системы. Тогда по теореме о фазовых торах она и (все близкие) диффеоморфна n-мерному тору.

Теорема. В сделанных предположениях *в окрестности* $\mathbf{L}_c$ *существуют канонические координаты* ρ_i, $\sigma_i \bmod 2\pi$ *такие, что*

$$F_i = F_i(\rho), \; H = H(\rho).$$