Они называются *переменными действие — угол*; σ_i суть угловые переменные на торе $\mathbf{T}^n(\rho)=\mathbf{L}_c$, $c=F(\rho)$.

Доказательство. По теореме о пополнении существуют канонические координаты $P_1, \ldots, P_n, Q_1, \ldots, Q_n$ такие, что (19.8)

$$P_i=F_i(p, q), \quad \overleftarrow{F}_i=\frac{\partial}{\partial Q_i}. \tag{20.18}$$

Таким образом, Q_i локально играют роль s_i из доказательства теоремы о фазовых торах: $Q_i=s_i+C_i$, где C_i зависят от окрестности. Играя C_i, мы можем согласовывать Q между соседними окрестностями, так что в итоге вправе считать, что Q_i совпадают с s_i на всем торе и представляют собой многозначные координаты: существуют n линейно независимых векторов ξ_α таких, что точка с координатами

$$P_i'=P_i, \quad Q_i'=Q_i+\xi_{\alpha i} \tag{20.19}$$

совпадает с точкой P, Q. Имеем $\xi_{\alpha i}=\xi_{\alpha i}(P)$, так как теперь мы рассматриваем не один тор, как в § 18, а семейство их, зависящее от P. Отображение (19) в фазовом пространстве тождественно и потому канонично; в пространстве переменных P, Q сдвиг (19) также является каноническим, так что по формуле (4)

$$\frac{\partial \xi_{\alpha i}}{\partial P_j}=\frac{\partial \xi_{\alpha j}}{\partial P_i}. \tag{20.20}$$

Отсюда вытекает, что

$$\xi_{\alpha i}=2\pi\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial P_i}, \tag{20.21}$$

где $\rho_\alpha(P)$ — некоторые независимые функции, поскольку $\det\|\xi_{\alpha i}\|\neq 0$. Положим теперь

$$Q_i=\frac{1}{2\pi}\sum_\alpha \xi_{\alpha i}\sigma_\alpha. \tag{20.22}$$

Очевидно, что $\sigma_\alpha \bmod 2\pi$. Наконец,

$$\sum_{i=1}^n dP_i\wedge dQ_i=\sum_i dP_i\wedge d\left(\sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial\rho_\alpha}{\partial P_i}\sigma_\alpha\right)=\sum_{\alpha, i}\frac{\partial\rho_\alpha}{\partial P_i}dP_i\wedge d\sigma_\alpha+$$
$$+\sum_{\alpha, i, j}\sigma_\alpha\frac{\partial^2\rho_\alpha}{\partial P_i\partial P_j}dP_i\wedge dP_j=\sum_\alpha d\rho_\alpha\wedge d\sigma_\alpha+0,$$

так что переменные ρ, σ — канонические.

Задача 60. Установить каноничность, выразив попарные скобки Пуассона переменных P, Q через скобки функции ρ, σ.

ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ. Поскольку $H=H(\rho)$, общее решение уравнений Гамильтона получается по формулам (13) в виде

$$\rho=\rho_i^0, \quad \sigma=\sigma_i^0+\omega_i(\rho^0)t, \tag{20.23}$$

где функции

$$\omega_i(\rho)=\frac{\partial H}{\partial\rho_i}$$