называются *частотами* системы. Пусть для простоты $n=2$. На плоскости переменных σ_1, σ_2 формулы (23) задают прямую. Этот образ, однако, нас не устроит, так как при изменении любого из углов на 2π нам следовало бы возвращаться в ту же точку, чего на плоскости не происходит. Короче говоря, из плоскости надо получить тор. Сделаем это поэтапно. Сначала учтем, что $\sigma_1 \bmod 2\pi$ и свернем плоскость в цилиндр (так же, как на примере с математическим маятником в § 16). В результате прямая преобразуется в винтовую линию. Затем учтем, что $\sigma_2 \bmod 2\pi$ и свернем цилиндр в тор (если оставаться в $\mathbf{R}^3$, то без деформаций не обойтись). Результат см. на рис. 76. Винтовая линия перейдет в так называемую обмотку тора, которая совершенно не обязана быть замкнутой кривой. Последнее происходит лишь в случае, когда

$$m_1\omega_1+m_2\omega_2=0,$$

где m_1 и m_2 — целые числа, $m_1^2+m_2^2\neq 0$. В противном случае обмотка всюду плотна на торе.

Если на рис. 76 не обращать внимания на то, что часть фазовой кривой изображена пунктиром, то мы увидим типичное поведение траектории в центральном поле сил и вообще в системе с циклической координатой. Таким образом, область возможности движения типа кольца есть в некотором смысле (несложные уточнения опускаем) проекция фазового тора на многообразие положений, а траектория движения есть проекция фазовой обмотки тора. Аналогичные утверждения справедливы и в случае Лагранжа движения тела с неподвижной точкой, только здесь обмотки проектируются с некоторым перекосом.

Пример. Гармонический осциллятор:

$$H=\frac{1}{2}(\alpha p^2+\beta q^2),\quad \alpha=1/m,\quad \beta=k>0.$$

Гиперболическим поворотом $P=\sqrt[4]{\frac{\alpha}{\beta}}\,p$, $Q=\sqrt[4]{\frac{\beta}{\alpha}}\,q$ гамильтониан приводится к виду $H=\frac{1}{2}\sqrt{\alpha\beta}\,(P^2+Q^2)$, после чего остается ввести канонические полярные координаты $\rho=(P^2+Q^2)/2$, $\sigma=\operatorname{arctg}(Q/P)$. Это и будут переменные действие — угол:

$$\rho=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\,p^2+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\,q^2\right),\quad \sigma=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\,\frac{q}{p}.$$

Обратные формулы:

$$p=\sqrt[4]{\frac{\beta}{\alpha}}\sqrt{2\rho}\cos\sigma,\quad q=\sqrt[4]{\frac{\alpha}{\beta}}\sqrt{2\rho}\sin\sigma.$$

Наконец, $H=\sqrt{\alpha\beta}\,\rho$, частота $\omega=\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{k/m}$ совпадает с частотой колебаний осциллятора.

Задача 61. Пусть точка на сфере движется по инерции.

А. Положение точки определим обычными сферическими координатами θ, ψ (8.7). Показать, что компоненты кинетического