момента Λ_x, Λ_y, Λ_z, переписанные в переменных θ, ψ, ρ_θ, ρ_ψ, находятся в инволюции с гамильтонианом H, а их попарные скобки удовлетворяют соотношениям (16.9), как и для свободной точки.

Б. Пусть Π — плоскость, перпендикулярная постоянному вектору кинетического момента, прямая Of — пересечение ее с плоскостью Oxy, σ_1 — угол между осью Ox и прямой Of, а σ_2 — угол между прямой Of и радиусом-вектором точки. Показать, что переменные $\rho_1=\Lambda_z$, $\rho_2=|\Lambda|$, σ_1, σ_2 являются каноническими, что это переменные действие — угол для движения по инерции и что $H=\rho_2^2/2mr^2$.

Примечание. Аналогичная конструкция используется для введения переменных действие — угол в задаче Кеплера и в случае Эйлера вращения твердого тела. Как и задача о геодезических на сфере, эти задачи относятся к числу вырожденных (гамильтониан зависит не от всех переменных действия).

ЭФФЕКТИВНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ ДЕЙСТВИЕ — УГОЛ. Существование переменных ρ, σ было установлено на произвольном каноническом многообразии и без предположения, что интегралы в инволюции заданы в какой-либо канонической системе координат. Если это предположение все же выполнено, то мы можем воспользоваться эффективным пополнением и получить смешанные формулы замены:

$$p=\overline{p}(P,\ q)\equiv\frac{\partial S}{\partial q},\quad Q=\overline{Q}(P,\ q)\equiv\frac{\partial S}{\partial P},\quad S=S(P,\ q).$$

Отметим, что матрица $\frac{\partial\overline{Q}}{\partial q}=\frac{\partial^2 S}{\partial P\partial q}$ невырождена, так что из последней группы формул можно получить $q=q_*(P,\ Q)$, и при этом матрица $\frac{\partial q_*}{\partial Q_n}=\left(\frac{\partial\overline{Q}}{\partial q}\right)^{-1}$ также невырождена.

«Презумпция аналитичности» (согласно которой соотношения, установленные локально, дают правильный результат и глобально) позволяет нам считать, что зависимости $q=q_*(P,\ Q)$ пригодны на интегральных торах в целом. Поэтому будем искать векторы ξ_α, решая систему уравнений:

$$f(P,\ Q,\xi)\equiv q_*(P,\ Q+\xi)-q_*(P,\ Q)=0. \qquad (20.24)$$

Нам известно, что у этой системы имеется n базисных решений (общее решение имеет вид $\Sigma n_\alpha\xi_\alpha$, где n_α — целые), причем от Q они не зависят (так что решение можно начать с того, что положить $Q=0$). Когда векторы $\xi_\alpha(P)$ найдены, вычисляем σ_α, обращая зависимости (22), и находим $\rho_\alpha(P)$ интегрированием уравнений (21). Таким образом, переменные действие — угол вычисляются в квадратурах как функции P, Q и затем p, q. Разумеется, речь идет о принципиальной возможности. На практике любой шаг может вывести за рамки элементарных или специальных функций, и мы даже не сможем записать конкретный результат.