Пример. Снова гармонический осциллятор. Возьмем

$$P=H(p,\ q)=\frac{1}{2}(\alpha p^2+\beta q^2).$$

Тогда

$$p=\sqrt{\frac{2P-\beta q^2}{\alpha}}\Rightarrow S=\int_0^q\sqrt{\frac{2P-\beta q^2}{\alpha}}\,dq=\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\int_0^q\sqrt{\frac{2P}{\beta}-q^2}\,dq\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q=\frac{\partial S}{\partial P}=\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\int_0^q\frac{1}{\beta}\frac{dq}{\sqrt{\frac{2P}{\beta}-q^2}}=\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\arcsin\frac{q}{\sqrt{\frac{2P}{\beta}}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow q=\sqrt{\frac{2P}{\beta}}\sin\sqrt{\alpha\beta}\,Q\Rightarrow\sin\sqrt{\alpha\beta}\,(Q+\xi)=\sin\sqrt{\alpha\beta}\,Q\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\xi=\frac{2\pi}{\sqrt{\alpha\beta}}\Rightarrow\frac{d\rho}{dP}=\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}},\quad Q=\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\sigma\Rightarrow\rho=\frac{P}{\sqrt{\alpha\beta}},\quad\sigma=\sqrt{\alpha\beta}\,Q\Rightarrow q=$$

$$=\sqrt[4]{\frac{\alpha}{\beta}}\sqrt{2\rho}\sin\sigma,\qquad p=\sqrt[4]{\frac{\beta}{\alpha}}\sqrt{2\rho}\cos\sigma,$$

как и было получено ранее. Пользование «презумпцией аналитичности» состояло в том, что мы не написали $\pm$ перед радикалом и в качестве функции обратной к arcsin, взяли sin со всей его областью определения.

Обобщение примера. Пусть имеем гамильтонову систему с одной степенью свободы, уровни энергии которой $H(p,\ q)=h$ компактны (по крайней мере в некоторой области на $\mathbf{R}^2(p,\ q)$), т. е. топологически представляют собой окружности (одномерные торы). Положим $P=H(p,\ q)$. Тогда

$$p=f(P,\ q)\Rightarrow S=\int_{q_0}^{q}f(P,\ q)\,dq\Rightarrow Q=\frac{\partial S}{\partial P}=\int_{q_0}^{q}\frac{\partial f}{\partial P}dq.$$

После обхода уровня переменная Q получит приращение:

$$\xi=\oint\limits_{H(p,\ q)=P}\frac{\partial f}{\partial P}dq=\frac{d}{dP}\oint f(P,\ q)\,dq=\frac{d}{dP}S(P),$$

где $S(P)$ — площадь области, заключенной внутри кривой $H(p,\ q)=P$. Следовательно, в качестве переменной действия можно взять $S(P)/2\pi$.

Этот вывод дополним указанием на смысл величины ξ в данном случае. Заметим, что

$$\frac{\partial f}{\partial P}=1\Big/\frac{\partial H}{\partial p},\quad\frac{dH}{\partial p}=\frac{dq}{dt}.$$

Поэтому

$$Q=\int_{q_0}^{q}\frac{\partial f}{\partial P}dq=\int_{q_0}^{q}\frac{dq}{\frac{dq}{dt}}=\int_{q_0}^{q}dt$$