имеет смысл времени движения от точки q_0 до точки q вдоль фазовой траектории $H(p, q)=P=h$, а приращение ξ после обхода кривой — смысл периода решения τ. Итак, $\xi=\tau(h)=S'(h)$.

Задача 62. Отображение (замена переменных) вида

$$\rho'=\rho, \ \sigma'=\sigma+f(\rho)$$

в канонических полярных координатах называется *каноническим кручением.*

А. Пусть есть каноническое отображение плоскости

$$p'=p'(p, q), \ q'=q'(p, q),$$

сохраняющее функцию F:

$$F(p', q')=F(p, q).$$

Показать, что в окрестности неособой связной компактной компоненты уровня $F=c_0$ существуют канонические координаты

$$\rho, \ \sigma \bmod 2\pi$$

такие, что в них отображение имеет вид канонического кручения.

Б. Пусть

$$\rho, \ \sigma \bmod 2\pi; \ \rho', \ \sigma' \bmod 2\pi$$

два варианта переменных действие — угол для системы с одной степенью свободы. Показать, что они связаны зависимостью вида

$$\rho'=\rho+\mathrm{const}, \ \sigma'=\sigma+f(\rho),$$

т. е. сдвигом действия и каноническим кручением (но здесь это уже не отображение, а замена переменных).

Вопрос. Какие возможны обобщения результатов этой задачи на случай многих степеней свободы? Какую роль может играть предположение с невырожденности системы $\left(\det \frac{\partial^2 H}{\partial \rho^2} \neq 0\right)$ при обобщении п. Б?

Задача 63. Допустим, что решение системы уравнений $P_i=F_i(p, q)$ имеет вид $p_i=f_i(P, q_i)$, пусть последние равенства при заданных P задают замкнутые кривые на плоскостях $\mathbb{R}^2(p_i, q_i)$. Доказать, что в качестве переменных ρ_i можно взять площади внутри этих кривых, деленные на 2π.

В частности, такая возможность представляется в случае, когда гамильтониан допускает простое или сложное разделение переменных (см. § 16). Например, в лиувиллевой системе

$$H=[\Sigma f_i(q_i)]^{-1}\left[\sum\left(\frac{p_i^2}{2}+V_i(q_i)\right)\right],$$

первые интегралы приводят к

$$\frac{1}{2}p_i^2+V_i(q_i)-hf_i=c_i, \ \Sigma c_i=0,$$