так что

$$\rho_i(h, c_i) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{q_i^-(h, c_i)}^{q_i^+(h, c_i)} \sqrt{2(c_i + hf_i - V_i)}\, dq_i,$$

где q_i^+, q_i^- — границы области неотрицательности подкоренного выражения (для простоты считаем ее отрезком). Полезно сравнить сказанное с материалом в конце § 9. Области возможности движения $\mathfrak{M}^{ch}$, о которых там идет речь в случае $n=2$, часто имеют вид прямоугольников в переменных (q_1, q_2), причем это действительно прямоугольники в рассматриваемой метрике. Прямоугольники $\mathfrak{M}^{ch}$ являются проекциями торов $\mathbf{L}_{ch}$ из фазового пространства в пространство положений. Чтобы представить себе, как такое могло получиться, надо склеить плоский тор из листа бумаги.

НЕИНВОЛЮТИВНЫЙ НАБОР ИНТЕГРАЛОВ. Приведем пример задачи с n степенями свободы, в которой имеется ровно n интегралов движения, но они не находятся в инволюции: пусть по сфере движутся две точки, причем потенциальная энергия действующих сил зависит только от расстояния между ними. Тогда сохраняются полная энергия и три компоненты суммарного кинетического момента системы — эти последние и имеют ненулевые скобки Пуассона.

§ 21. УРОВЕНЬ ЭНЕРГИИ И ВРЕМЯ

ЗАМЕНЫ ВРЕМЕНИ. Пусть есть система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = X(x). \tag{21.1}$$

Положим формально $d\tau = \Pi(x)\,dt$, тогда

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{\Pi(x)} X(x). \tag{21.2}$$

Содержание перехода от системы (1) к системе (2) состоит в следующем. Пусть $\bar{x} = x(t, x_0)$ — общее решение системы (1) и задана функция $\Pi(x)$, сохраняющая знак в этой области. Вдоль каждого решения можно вычислить функцию:

$$\tau = \tau^*(t, x_0) = \int\limits_0^t \Pi(x(t, x_0))\, dt,$$

которая монотонна на всем интервале определения решения и потому имеет обратную: $t = t_*(\tau, x_0)$. Подставим последнюю зависимость в общее решение; тогда

$$x = \bar{\bar{x}}(\tau, x_0) = \bar{x}(t_*(\tau, x_0), x_0)$$

есть общее решение системы (2). Действительно