$$\frac{d\bar{\bar{x}}}{d\tau}=\frac{d\bar{x}}{dt}\frac{dt_*}{d\tau}=X(\bar{\bar{x}}(\tau,\ x_0))\cdot\frac{1}{\Pi(\bar{\bar{x}}(\tau,\ x_0))}.$$

ГАМИЛЬТОНОВ СЛУЧАЙ. В случае системы в канонической форме

$$\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q},\quad \dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p} \tag{21.3}$$

после замены $d\tau=\Pi(p,\ q)\,dt$ получим

$$\frac{dp}{d\tau}=-\frac{1}{\Pi}\frac{\partial H}{\partial q},\quad \frac{dq}{d\tau}=\frac{1}{\Pi}\frac{\partial H}{\partial p}. \tag{21.4}$$

Вообще говоря, правые части не обязаны быть частными производными по q, p некоторой функции $F(p,\ q)$, так что уравнения (4) не будут каноническими.

УРОВЕНЬ ПРИТЯЗАНИЙ. Если мы все же хотим остаться в рамках гамильтонова формализма, то придется ограничиться решениями, лежащими на одном фиксированном (хотя и произвольно фиксированном) уровне энергии $H(p,\ q)=h$. Введем функцию

$$F(p,\ q)=\frac{1}{\Pi}(H-h), \tag{21.5}$$

и рассмотрим систему с гамильтонианом $F(p,\ q)$:

$$\frac{dp}{d\tau}=-\frac{\partial F}{\partial q}=-\frac{1}{\Pi}\frac{\partial H}{\partial q}-(H-h)\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{\Pi}\right),\ \frac{dq}{d\tau}=\ldots \tag{21.6}$$

Видим, что во всех точках уровня $H=h$ система (6) совпадает с системой (4). Для системы (6) это уровень $F=0$.

Короче говоря, *замену времени в гамильтоновой системе можно сделать только на уровне энергии.* Кстати, сложное разделение переменных таким путем сводится к простому.

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ. Ограничимся простейшей задачей о движении точки по прямой под действием силы тяготения Ньютона с нулевой начальной скоростью из положения r_0 в момент $t_0=0$. Тогда $h=-1/r_0<0$. Функция $r(t)$ убывает и

$$\frac{dr}{dt}=-\sqrt{2\left(h+\frac{1}{r}\right)}.$$

При $r\to 0$ время t стремится к конечному пределу $\bar{t}$, причем

$$r(t)=O(\bar{t}-t)^{2/3}. \tag{21.7}$$

Точка за конечное время достигает $r=0$. Таким образом, фазовый поток в данном случае стеснен, так как движения определены на конечном интервале времени. Попробуем произвести замену

$$r=s^2/2. \tag{21.8}$$