Тогда $H=\frac{p^2_s}{2s^2}-\frac{2}{s^2}=h$. Замена времени $d\tau=\frac{2dt}{s^2}=\frac{dt}{r}$ приводит нас к системе с гамильтонианом

$$F(p_s,\ s)=\frac{p^2_s}{4}-\frac{hs^2}{2} \tag{21.9}$$

на уровне $F=1$. Поскольку $h<0$, это — гамильтониан гармонического осциллятора. Поэтому

$$s=(-2/h)^{1/2}\cos(-h/2)^{1/2}\tau.$$

Значение $s=0$ достигается по-прежнему за конечное время τ, однако выражение для F таково, что F продолжается непрерывно, гладко и даже аналитично на множество $s=0$. Фазовый поток системы с гамильтонианом F нестеснен. В силу (8) точка упруго отражается от притягивающего центра (а не проскакивает по другую сторону от него).

Этот прием в небесной механике получил название регуляризации. В задаче многих тел производится аналогичная регуляризация двойных столкновений (когда стремится к нулю расстояние ровно между двумя из n тел): сохраняется и асимптотика (7) и явление упругого отражения.

НЕАВТОНОМНЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ. Будем рассматривать системы канонического вида:

$$\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_i},\ \frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i}\quad i=1,\ldots,n, \tag{23.11}$$

в которых теперь будем считать $H=H(p_1,\ \ldots,\ p_n,\ q_1,\ \ldots,\ q_n,\ t)$.

Откуда берутся такие системы? Например, неавтономную гамильтонову систему можно рассматривать как сужение некоторой автономной системы на уровень энергии. Именно, пусть имеем автономную систему

$$\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial q_i},\ \frac{dq_i}{dt}=+\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial p_i},\quad i=1,\ldots,n+1.$$

Зафиксируем произвольно константу энергии:

$$\mathscr{H}(p_1,\ \ldots,\ p_n,\ p_{n+1},\ q_1,\ \ldots,\ q_{n+1})=h. \tag{21.12}$$

Предположим, что в окрестности произвольно взятой точки, не являющейся состоянием равновесия, выполнено условие

$$\frac{dq_{n+1}}{dt}=\frac{\partial\mathscr{H}}{\partial p_{n+1}}\neq 0;$$

тогда локально уровень $\mathscr{H}=h$ можно задать в виде графика, выразив p_{n+1} из равенства (12):

$$p_{n+1}=-H(p_1,\ \ldots,\ p_n,\ q_1,\ \ldots,\ q_{n+1},\ h).$$

Положив $\tau=q_{n+1}$, по теореме о неявной функции получим

$$\frac{dp_i}{d\tau}=-\frac{\partial H}{\partial q_i},\ \frac{dq_i}{d\tau}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\ i=1,\ldots,n,$$