$$H = H(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, \tau, h).$$

Это — так называемые уравнения Уиттекера. Понизив порядок системы на две единицы, мы потеряли автономность и получили систему с параметром. С точки зрения практического интегрирования выигрыш, таким образом, незначителен. Однако в теоретических исследованиях прием понижения порядка применяется, и с пользой.

Если же неавтономная система (11) задана сама по себе, то достаточно взять

$$\mathscr{H} = p_{n+1} + H(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, q_{n+1}).$$

Этот прием потребуется в нижеследующей теореме.

НЕАВТОНОМНЫЕ КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. Ограничимся рассмотрением замен переменных. Замена

$$P = P^*(p, q, t), \quad Q = Q^*(p, q, t)$$

называется канонической, если при каждом фиксированном t она является канонической в смысле § 20. Таким образом, мы можем пользоваться аппаратом производящих функций, в которых t будет фигурировать в качестве параметра. Смешанные формулы замены будут:

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial S}{\partial P},$$

$$S = S(P, q, t), \quad \det \frac{\partial^2 S}{\partial P \partial q} \neq 0.$$

Теорема. *После канонической замены переменных уравнения (11) преобразуются в уравнения*

$$\frac{\partial P}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q}, \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q},$$

где функции $H(p, q, t)$ и $\tilde{H}(P, Q, t)$ связаны тождеством

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t\right) = \tilde{H}\left(P, \frac{\partial S}{\partial P}, t\right)$$

(следует обратить внимание, что это тождество написано в переменных P, q, t, а не в переменных p, q, t или P, Q, t).

Комментарий. Если мы захотим, чтобы гамильтониан $\tilde{H}$ тождественно равнялся нулю, то функция $S(P, q, t)$ должна будет удовлетворять условию

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t\right) = 0.$$

Это — уравнение Гамильтона—Якоби в классическом виде.