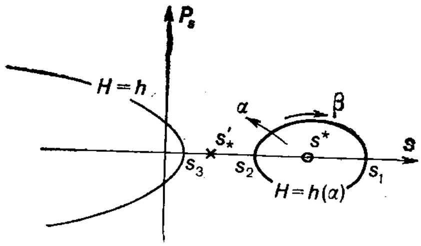

Рис. 45. Уровень энергии в фазовом пространстве, отвечающий области возможности движения на рис. 42. Легко видеть, что эта область может рассматриваться как проекция уровня на ось s; потенциальной яме (связной части типа отрезка) отвечает замкнутая кривая на фазовой плоскости

Примечания. 1) Внутри замкнутой кривой находится устойчивое состояние равновесия. При линеаризации системы в его окрестности эта кривая аппроксимируется эллипсом (ср. с рис. 72). 2) Изображен также характер изменения произвольных постоянных (α и β), получающихся при применении метода Гамильтона — Якоби. 3) Неустойчивое состояние равновесия помечено крестиком: оно располагается на оси s между связными компонентами уровня энергии. С ростом h эти компоненты приблизятся справа и слева к указанному равновесию, и в его окрестности будут идти примерно по гиперболам (ср. с рис. 73). После того как h пересечет критическое значение, уровень энергии станет связным, но поначалу будет иметь тонкую перемычку, проходящую сверху и снизу от состояния равновесия, приблизительно опять-таки по гиперболам (снова см. рис. 73).

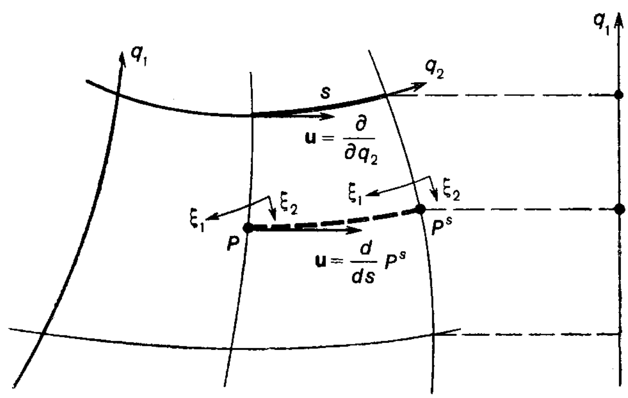

Рис. 46. Симметрия. На многообразии положений классической натуральной системы (изображен случай двух степеней свободы, например точка на поверхности) действует семейство отображений $P \mapsto P^s$ (возьмем, как принято, группу, хотя это и не обязательно), обладающее тем свойством, что в любой «сопутствующей», «увлекаемой» системе координат ξ_1, ξ_2 выражение лагранжиана получается одним и тем же. Тогда имеет место интеграл движения, представимый в виде скалярного произведения (в метрике многообразия положений, задаваемой квадратичной по скоростям частью лагранжиана) вектора скорости с порождающим группу векторным полем $\mathbf{u}$. Особенно просто отображения симметрии выглядят в системе координат q_1, q_2, из которых одна — циклическая: тогда соответствующие координатные линии являются интегральными для порождающего поля, а отображения представляются сдвигами вдоль этих линий. Таким образом, понятие симметрии есть инвариантная (не зависящая от выбора координат) переформулировка наличия циклической координаты. Исключение этой координаты из рассмотрения по Раусу (переход к правой части рисунка) на инвариантном языке начинается с факторизации — перехода к новому многообразию меньшей размерности, каждой точке которого отвечает целая траектория группы симметрий многообразия положений

Примечание. Можно сказать, что система с двумя степенями свободы, обладающая симметрией, интегрируема потому, что исключение игнорируемой координаты приводит к системе с одной степенью свободы, интегрируемой всегда. Обобщая, можно утверждать даже большее: все интегрируемые задачи классической динамики (по крайней мере динамики системы точек, чтобы оставить в стороне более абстрактные конструкции) сводятся к одной или нескольким системам с одной степенью свободы