• **Основные знания и навыки,** ожидаемые от студентов-механиков на зачете и (или) экзамене по теоретической механике после 3-го семестра (с учетом курса общей физики и дифференциальных уравнений): Студенту предстоит

1) понимать, что движение может рассматриваться только с точки зрения некоторой системы отсчета; знать определения и формулы для скорости и ускорения в декартовой "неподвижной" системе координат

2) знать определение твердого тела, понимая, существование в окружающем твердых тел является (по Пуанкаре) фундаментом нашего ориентирования в окружающем мире - и воплощено в идее группы изометрий трехмерного евклидова пространства, которая состоит из коммутативной группы параллельных переносов и некоммутативной группы поворотов;

3) поскольку всякое бесконечно малое перемещение твердого тела (в котором есть три точки, не лежащие на одной прямой) может быть представлено композицией малого сдвига отмеченной точки вдоль некоторого направления и малого поворота вокруг некоторой оси, проходящей через эту точку, предельным переходом надо уметь выводить, что при движении тела в каждый момент времени существует и единствен вектор угловой скорости $\overline{\omega}$ такой, что (формула Эйлера)

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \left[\overline{\omega} \times \overline{AB}\right] ;$$

для любых двух точек тела A, B; надо понимать, почему только в частном случае вращения вокруг неподвижной оси с направляющим вектором $\mathbf{e}$ будет $\overline{\omega} = \dot{\varphi}\mathbf{e}$, а общем случае такая формула невозможна;

4) знать разложения скорости и ускорения в полярной системе координат

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\mathbf{e}_\varphi \ ;$$

5) понимать, что уравнение Ньютона $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ выписывается в системе отсчета, которую с принятой степенью точности можно считать инерциальной, что вектор силы $\mathbf{F}$ есть модель суммы воздействий на точку со стороны других объектов;

6) уметь переходить от векторного уравнения Ньютона к системам дифференциальных уравнений в декартовых и полярных (цилиндрических) координатах;

7) знать простейшие выражения для силы гравитации (между двумя материальными точками) и электромагнитной силы (сила Лоренца)

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\left[\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right]\right) ;$$

8) знать размерности основных физических величин и констант, применять соображения размерности и П-теорему, в том числе для сокращения выкладок;

9) знать условия существования интегралов импульса, площадей и энергии; помнить их выражения в декартовой и цилиндрической системах координат;

10) знать законы Кеплера и уметь доказывать их равносильность закону тяготения Ньютона;

11) знать основные эффекты движения заряда в постоянном электромагнитном поле (покой, движение по окружности, по прямой и «в общем случае» по винтовой линии);

12) уметь решать до конца, графически и качественно исследовать различные варианты (выделяя среди них грубые и негрубые) линейного уравнения второго порядка

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + \Phi$$

понимая его и в физическом смысле, и как тривиальное приближение для уравнений Ньютона вида $m\ddot{x} = F(x, \dot{x})$;

13) для последних уравнений знать общие свойства фазовых траекторий (на фазовой плоскости $(x, \dot{x})$; выделять среди них равновесия, знать классификацию Пуанкаре особых точек, разпознавать среди грубые (седла, узлы и фокусы) и негрубые (центры), понимать поведение траекторий вблизи равновесий, находить сепаратрисы седел и максимально продолжать их;

14) на плоскости $(x, \dot{x})$ изображать фазовые кривые равноускоренного движения, гармонического осциллятора, осциллятора с трением (два грубых варианта), горизонтального движения с вязким трением, падения с вязким трением.

15) знать устройство фазовых портретов консервативных задач (симметрия фазовых траекторий, центры и седла соотвествуют минимумам и максимумам потенциальной энергии); знать и применять в простых частных случаях простейшую технику интегрирования «в квадратурах»:

$$\frac{1}{2}\dot{s}^2 + V(s) = h \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{ds}{\sqrt{2(h - V(s)}} \quad \Rightarrow \quad \dots \ ;$$

иметь представление об бифуркационных диаграммах, когда потенциальная энергия зависит от параметра, о простейших наблюдениях теории катастроф;

16) знать основные эффекты при возбуждении осциллятора периодической силой

$$m\ddot{x} + kx + c\dot{x} = \Phi \cos \nu t \ ,$$

то есть биения, раскачка, вынужденные колебания;

17) понимать первичную идею теории теории возмущений —

$$x(t, \varepsilon) = x^0(t) + \varepsilon\xi(t) + \varepsilon^2\eta(t, \varepsilon)$$

на примере уравнения

$$m\ddot{x} = F(x) + \varepsilon\Phi(\dot{x}, x, t)$$

и уметь приближенно вычислять, например, работу возмущающей силы интегрированием вдоль порождающего решения:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon\Phi \, dx = \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \Phi(\dot{x}^0(t), x^0(t), t) + O(\varepsilon^2) \ .$$

18) понимать идею искусственного введения малого параметра

$$x = l(t) + \varepsilon\xi$$

для исследования движений, близких к известному $l(t)$, и выводить уравнение в вариациях вида

$$\ddot{\xi} + A(t)\xi = 0 \ ,$$

для уравнений $m\ddot{x} = F(x, t)$;

19) понимать идею отображения Пуанкаре (отображения за период), в частности, для уравнения вида

$$\ddot{x} + (1 + \mu f(t))x = 0 \ , f(t + T) \equiv f(t)$$

и объяснять на примерах (ступенчатая функция $f(t)$) явление параметрического резонанса, то есть возможной неустойчивости даже при малых μ;

20) понимать на примерах идею отображения Пуанкаре (отображение последования) на фазовой плоскости для нелинейных уравнений и объяснять при его помощи появление автоколебаний (предельного цикла по Пуанкаре);

21) понимать картину траекторий бигармонического осциллятора (фигуры Лиссажу и их отображение на биллиард) и доказывать всюду плотность траекторий при иррациональном отношении частот;

22) знать качественные свойства гармонического осциллятора на плоскости и сферического маятника;

23) уметь вычислять силы инерции при переходе к равномерно вращающейся системе координат, знать формулу для веса, качественные эффекты падения тел и колебания маятника Фуко;

24) знать формулу длины дуги на окружности; понимать, что плоская кривая с точностью до бесконечно малых третьего порядка приближается соприкасающейся окружностью; правильно изображать репер **Ф**ренé; помнить и понимать формулы

$$\mathbf{v} = \dot{s}\mathbf{e}_\tau \ , \quad \mathbf{a} = \ddot{s}\mathbf{e}_\tau + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\mathbf{e}_\tau \ ;$$

25) знать три основные модели движения точки по неподвижной плоской кривой: идеальная связь, вязкое трение и сухое трение; знать методику и последовательность решения уравнений движения во всех вариантах и основные качественные эффекты движения;

Разумеется, следует уметь доводить задачи, не требующие громоздких выкладок, до правильного ответа, и давать ответу качественную, геометрическую или физическую интерпретацию.

ЛИТЕРАТУРА:

Я.В.Татаринов. "Лекции по классической динамике" —
отражение вкусов автора, но не замена будущим лекциям
Ю.Ф.Голубев. "Основы теоретической механики" —
обстоятельный, выверенный учебник, написанный профессором нашей кафедры
А.П.Маркеев. "Теоретическая механика" —
мастерское и полное изложение предмета с общепризнанной терминологией
В.Ф.Журавлев. "Основы теоретической механики" —
оригинальный и удачный опыт современного видения предмета

Рекомендуется кафедральный сборник "Задачи по классической механике", вышедший в 2001 году (именно это издание).

Ниже даются образцы таких задач, которые нельзя найти в рекомендуемом задачнике

СООБРАЖЕНИЯ РАЗМЕРНОСТИ

1. Определить размерности

i) гравитационной постоянной f из закона тяготения (Гука-)Ньютона

$$F = f\frac{mM}{R^2};$$

ii) величины заряда в системе единиц СГС из закона Кулона

$$F = \frac{qQ}{R^2};$$

iii) единиц измерения напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ и магнитного поля $\mathbf{B}$ из выражения силы Лоренца

iv) модуля Юга E из выражения силы растяжения

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l};$$

при малом увеличении длины стержня l с площадью сечения S;

v) коэффициента жескости k Гука из формулы $F = k\Delta l$; при упругой деформации;

vi) коэффициента вязкости μ из формулы Ньютона

$$F = \mu v\frac{S}{h}$$

при движении пластинки площади S по слою жидкости высотой h со скоростью v;

vii) коэффициента вязкого сопротивления c для малого тела в жидкости: $F = -cv$;

2. Шар радиуса R движется в жидкости со скоростью $\mathbf{v}$. Допустим, что сила сопротивления, помимо названных величин, зависит еще только от

i) плотности жидкости ρ;

ii) вязкости жидкости μ.

Найти соответствущие выражения силы F.

3. Как выражаются из соображений размерности и точно

i) модуль a ускорения точки при равномерном движении со скоростью v по окружности радиуса R?

ii) скорость после свободного падения по вертикали на высоту h?

iii) период малых колебаний математического маятника?

iv) период обращения по круговой орбите радиуса R, в поле тяготения неподвижной массы M?

4. Если Земля сожмется вдвое, то во сколько раз изменится первая космическая скорость? А вторая? На Луне ускорение силы тяжести в шесть раз меньше, чем на Земле. Как там с первой космической скоростью?

5. С помощью П-теоремы получить следующие зависимости:

i) скорость звука в упругом материале плотности ρ с модулем Юнга E;

ii) расход жидкости Q (это вес в единицу времени), имеющей плотность ρ и перетекающей через плотину: возвышение жидкости над плотиной (вдалеке от нее) равно h [ответ: $Q = C\rho\sqrt{G^3h^5}$];

iii) закон $r(t)$ распространения сферической ударной волны после сильного взрыва (в начале координат) энергии E в газе плотности ρ [ответ: $r = (E/\rho)^{1/5}t^{2/5}$];

iv) сопротивление участка трубы площади S при движении вдоль него вязкой жидкости плотности ρ со средней скоростью v.

6. Известны следующие интегралы (произвольную константу опускаем):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \ ; \qquad \int \frac{dx}{t+1} = \ln(t+1) \ .$$

С помощью П-теоремы найти соответственно

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \ ; \qquad \int \frac{dx}{at+b} \ .$$

Придумать аналогичные примеры.