Для краткости в условие сразу введены буквенные обозначения.

Дан однородный обруч с перпендикулярными диаметрами OP и KL длины $2a = 2$. Вектор $\overline{OP}$ поворачивается в плоскости Oxy на угол $\psi = 2t$ (с осью абсцисс), а вектор $\overline{KL}$ составляет с плоскостью угол $\theta = t$. Масса обруча $M = 1$.
Выбирая удобные реперы, написать, чему равны

А) угловая скорость обруча $\boldsymbol{\omega}$;

Б) кинетический момент $\boldsymbol{\Lambda}_O$ обруча относительно точки O;

В) кинетическая энергия T обруча;

Г) момент сил $\boldsymbol{G}_O$, обеспечивающий заданное движение.

РЕШЕНИЕ. Ключевой этап будет — применить в главном репере схему

$$\boldsymbol{\omega} = p\boldsymbol{e}_1 + q\boldsymbol{e}_2 + r\boldsymbol{e}_3 \quad \mapsto \quad \boldsymbol{\Lambda} = Ap\boldsymbol{e}_1 + Bq\boldsymbol{e}_2 + Cr\boldsymbol{e}_3$$

Видим, что на вращение вокруг оси Oz накладыватся вращение вокруг оси OP. Поэтому

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\boldsymbol{e}_z + \dot{\theta}\boldsymbol{e}_{OP} = 2\boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{e}_{OP} \tag{А}$$

Поскольку чертежа здесь нет, словесное уточнение: при $0 < \theta < \pi/2$ точка L приподнята над плоскостью Oxy и идет впереди OP с ростом ψ.

Очевидно, что направления $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_{OP}, \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_{KL}, \boldsymbol{e}_3 = [\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2]$ являются главными в центре масс. Очевидно, что момент инерции $C = Ma^2 = 1$. Теперь

$$C = A + B \text{ (тело плоское)}, \quad A = B \text{ (симметрия)} \quad \Rightarrow \quad A = B = \tfrac{1}{2}.$$

(!) У нас *тело с неподвижной точкой O*; направления $\boldsymbol{e}_i$ являются главными и для нее ($\boldsymbol{e}_1$ как ось симметрии, а $\boldsymbol{e}_3$ перпендикулярно плоскости... опять симметрии). Соответствующие моменты инерции вычисляются по формуле Гюйгенса-Штейнера:

$$A' = A = \frac{1}{2}, \ B' = B + Ma^2 = \frac{3}{2}, \ C' = C + Ma^2 = 2.$$

Угловую скорость раскладываем по главному реперу:

$$\boldsymbol{e}_z = \cos\theta\boldsymbol{e}_3 + \sin\theta\boldsymbol{e}_2 \quad \Rightarrow \quad p = 1, \ q = 2\sin t, \ r = 2\cos t.$$

Стало быть,

$$\boldsymbol{\Lambda}_O = \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1 + 3\sin t\boldsymbol{e}_2 + 4\cos t\boldsymbol{e}_3 \ . \tag{Б}$$

По теореме об изменении кинетического момента

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\Lambda}_O = \boldsymbol{G}_O \ ;$$

применяем формулы формулы Эйлера: пишем $\boldsymbol{G}_O = G_1\boldsymbol{e}_1 + G_2\boldsymbol{e}_2 + G_3\boldsymbol{e}_3$, и

$$\begin{aligned} G_1 =& A'\frac{dp}{dt} + (C' - B')qr = \frac{1}{2}\cdot 0 + (2 - \frac{3}{2})\cdot 2\cos t\cdot 2\sin t = \sin 2t \ , \\ G_2 =& B'\frac{dq}{dt} + (A' - C')rp \ = \frac{3}{2}\cdot 2\cos t + (\frac{1}{2} - 2)\cdot 1\cdot 2\cos t = 0 \ , \\ G_3 =& C'\frac{dr}{dt} + (B' - A')pq \ = -2\cdot 2\sin t + (\frac{3}{2} - \frac{1}{2})\cdot 2\sin t\cdot 1 = -2\sin t \ . \end{aligned} \tag{Г}$$

Кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2}(A'p^2 + B'q^2 + C'r^2) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}4\sin^2 t + 2\cdot 4\cos^2 t) = \frac{13}{4} + \cos^2 t. \tag{В}$$

ПРИМЕЧАНИЯ:

0. Возможно иначе представить себе угол θ , тогда будет $\boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{e}_z - \boldsymbol{e}_{OP}$.

Возможны и другие перемены знаков у компонент векторов при слегка ином выборе реперов. Ясно, что не эти вещи влияют на оценку работы.

1. В условии просили найти угловую скорость — это вектор (многие вычисляли зачем-то еще и модуль). Формула (А) фактически есть разложение по поворачивающемуся реперу

$$\boldsymbol{e}_z, \boldsymbol{e}_{OP}, [\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_{OP}] .$$

Если использовать его для подвижной системы координат, то (А) получается по формуле сложения угловых скоростей.

Вместе с тем (А) получается из соображений линейности по скоростям (см. в лекциях рассказ про углы Эйлера). Эта формула интуитивно очевидна, и при проверке мы не обращали внимания, есть ли четкое обоснование. Такое обоснование естественно (было бы) потребовать в качестве уточняющего вопроса на устном этапе.

2(к (!)). Конечно, сначала в голову придет получить

$$\boldsymbol{\Lambda}_S = Ap\boldsymbol{e}_1 + Bq\boldsymbol{e}_2 + Cr\boldsymbol{e}_3 ,$$

а потом написать

$$\boldsymbol{\Lambda}_O = \boldsymbol{\Lambda}_S + M\left[\overline{OS} \times \boldsymbol{v}_S\right]$$

(но слишком многие эту формулу писали неправильно), причем второе слагаемое очевидно, так как S движется по окружности с центром O : $Ma^2\dot{\psi}\boldsymbol{e}_z$.

3. Аналогично кинетическую энергию можно (и так и бывало) искать по формуле

$$T = \frac{M}{2}\boldsymbol{v}_S^2 + \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2).$$

Вполне приемлемо и фактически не длиннее, так как сразу $\boldsymbol{v}_S^2 = a^2\dot{\psi}^2$.

4. Можно было дифференцировать формулу (Б) «в лоб», то есть воспользоваться формулой, связывающей абсолютную и относительную производную вектора. Это не ошибка, но, скорее всего, свидетельство незнания формул Эйлера. На таком пути уравнения Эйлера (в векторном виде) выводятся заново, но бессознательно. Но это мнение не влияет на оценку.

==

Если в решении есть ошибка, то первому объявившему о ней по ttrnv@narod.ru будет зачтен письменный экзамен.