Оглавление

(1) **Размерность физической величины**

Не станем претендовать на полноту и ограничимся рамками только механики в узком смысле слова. Обратим внимание вот на что. Измерение или задание разного рода величин всякий раз предполагает осознанный выбор единиц длины, времени и массы. Например, применяются системы СГС (см, с, г), СИ (м, с, кг) и др. Численное значение величины имеет смысл только тогда, когда задана ее размерность: пишут

$$l = 183 \text{ см}, \; v = 60 \text{ км/ч}, \; g = 9{,}8 \text{ м/с}^2, m = 40 \text{ т},$$

и т.д. Будем условно обозначать размерность длины, массы и времени соответственно буквами L, M, T (по Максвеллу). Размерность любой физической величины X будет

$$[X] = \mathrm{L}^{x_1} \cdot \mathrm{M}^{x_2} \cdot \mathrm{T}^{x_3},$$

где x_1 , x_2 , x_3 — некоторые целые или рациональные числа. Если подумать, что именно мы пишем, когда хоти предъявить размерую величину, то станет ясно, что мы применяем следующее

Определение. Размерной величиной называется одночлен вида $\mathsf{X} = XL^{x_1}M^{x_2}T^{x_3}$.

Обычно не принято становиться на такую формальную точку зрения, но она не только не должна пугать, но и делает естественным следующее важное утверждение: если мы изменим единицы измерения (допустим, перейдем от СГС к СИ), и положим

(2) $$L = \lambda L', M = \mu M', T = \tau T'$$

то численное значение величины X изменится тоже:

(3) $$\mathsf{X} = XL^{x_1}M^{x_2}T^{x_3} = X'(L')^{x_1}(M')^{x_2}(T')^{x_3} \quad \text{где } X' = X\lambda^{x_1}\mu^{x_2}\tau^{x_3}.$$

Например, для скорости v имеем

(4) $$[v] = \mathrm{L/T}, 20 \text{ м/с} = 72 \text{ км/ч},$$

для ускорения —

$$[g] = \mathrm{L/T}^2, 9{,}8 \text{ м/с}^2 \approx 130\,000 \text{ км/ч}^2.$$

Равенство размерных величин, разумеется, определяется так:

$$\mathsf{X} = \mathsf{Y} \Longleftrightarrow [X] = [Y], \; X = Y.$$

Операции над размерными величинами тоже понятны:

а) иногда определено сложение: $\mathsf{Z} = \mathsf{X} + \mathsf{Y} \Longleftrightarrow [X] = [Y] = [Z], \quad Z = X + Y$;

б) умножение $\mathsf{Z} = \mathsf{XY}$ определено всегда; при этом

$$Z = XY; \quad [XY] = \mathrm{L}^{x_1+y_1}\mathrm{M}^{x_2+y_2}\mathrm{T}^{x_3+y_3} = [X][Y];$$

в) возможно и возведение в рациональную степень $\mathsf{Z} = \mathsf{X}^a$; при этом

(5) $$Z = X^a, \quad [X^a] = \mathrm{L}^{ax_1}\mathrm{M}^{ax_2}\mathrm{T}^{ax_3} = [X]^a \; ;$$

можно уточнить, что в натуральную степень можно возводить любые величины, в целую неположительную - ненулевые, в нецелую рациональную - положительные.

Только что сказанное составляет наивный уровень соображений размерности и известно каждому. Однако из этого можно извлечь намного более глубокие заключения, составляющие

(6) **Метод безразмерных комбинаций**

Начнем с того, что отречемся от только что данных определений. Но с разумными оговорками.

Вместо того, чтобы рассматривать функции $f(\mathsf{X},\mathsf{Y},\mathsf{Z},\ldots)$ с одночленами в качестве аргументов, рассматривают зависимости от их численных значений $Q=f(X,Y,Z,\ldots)$. При этом каждой переменной X приписана размерность $[X]=L^{x_1}M^{x_2}T^{x_3}$ и на f налагается требование *корректности:* если совершить преобразование (2) и (3), то зависимость обязана остаться верной, то есть мы всегда получим $Q'=f(X',Y',Z',\ldots)$.

Размерности $L,\ M,\ T$ будем считать независимыми. Разумно будет сказать, что размерности величин $l,\ v,\ g$ зависимы, поскольку

$$[v]^2=[l][g], \tag{7}$$

и что, наоборот, размерности силы, скорости и плотности

$$[F]=\mathrm{ML/T^2},\quad [v]=\mathrm{L/T},\quad [\rho]=\mathrm{M/L^3}$$

независимы, так как связать их соотношением типа $[F]^a=[v]^b[\rho]^c$ явно невозможно. Обобщив, будем говорить, что величины X , Y , Z

размерно независимы,

если определитель из соответствующих показателей

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}\neq 0. \tag{8}$$

ЛЕММА.

Если P – другая размерная величина, то

$$[P]=[X]^a[Y]^b[Z]^c\ , \tag{9}$$

В самом деле, найти значения a,b,c предстоит из системы

$$p_i=ax_i+bx_i+cx_i,\quad \text{где } i=1,2,3 \tag{10}$$

причем определитель матрицы системы мы видим в (8), он не равен нулю и формулы (10) обратимы над Q.

СЛЕДСТВИЕ. Если при замене масштаба (2) имеем $X'=\dfrac{X}{\xi},\ Y'=\dfrac{Y}{\eta},\ Z'=\dfrac{Z}{\zeta}$, то величина P меняется следующим образом:

$$P'=\frac{P}{\xi^a\eta^b\zeta^c} \tag{11}$$

В сущности, $[X],[Y],[Z]$ можно считать новыми основными единицами измерения.

Определение. Величина

$$\Pi=\frac{P}{X^aY^bZ^c}$$

есть так называемая

безразмерная комбинация

величин $P,\ X,\ Y,\ Z$. Показатели при L, M, T для нее равны нулю. Она сохраняет свое численное значение при изменении масштабов.

Взятие любой элементарной ($\sin,\ \exp,\ \ln,\ \mathrm{arctg}$ и т.д.) или иной не полиномиальной функции возможно лишь от безразмерных величин (например, углов в радианной мере) или от безразмерных комбинаций размерных величин.

Π - *теорема.* **Пусть имеется корректная зависимость вида**

$$P_0 = f(X, Y, Z, P_1, \ldots, P_S), \tag{12}$$

в которой величины X, Y, Z **положительны и размерно независимы. Тогда существует эквивалентная зависимость**

$$\Pi_0 = \varphi(\Pi_1, \ldots, \Pi_S), \tag{13}$$

в которой Π_i **— безразмерные комбинации вида (7).**

Доказательство. Зафиксируем произвольно величины $X, Y, Z, P_1, \ldots, P_S$, вычислим P_0 и после этого совершим произвольное изменение масштабов (2). В силу (11) и корретности зависимости f имеем тогда

$$\frac{P_0}{\xi^{a_0}\eta^{b_0}\zeta^{c_0}} = f\left(\frac{X}{\xi}, \frac{Y}{\eta}, \frac{Z}{\zeta}, \frac{P_1}{\xi^{a_1}\eta^{b_1}\zeta^{c_1}}, \ldots, \frac{P_S}{\xi^{a_S}\eta^{b_S}\zeta^{c_S}}\right).$$

Каковы бы ни были значения X , Y , Z , всегда можно так изменить масштабы, что

$$\xi = X, \quad \eta = Y, \quad \zeta = Z.$$

Всякий раз получим

$$\frac{P_0}{X^{a_0}Y^{b_0}Z^{c_0}} = f\left(1, 1, 1, \frac{P_1}{X^{a_1}Y^{b_1}Z^{c_1}}, \ldots, \frac{P_S}{X^{a_S}Y^{b_S}Z^{c_S}}\right),$$

Осталось положить

$$\varphi(---) = f\,(1, 1, 1, ---) \tag{14}$$

и (13) у нас в руках. Но мы будем подчеркнуто аккуратны и кое-что проясним. Нам ясно, что если величины $(\Pi_1, \ldots, \Pi_S)$ лежат в области определения функции φ, то этот факт не зависит от выбора единиц измерения, а потому величины $(1, 1, 1, \Pi_1, \ldots, \Pi_S)$ лежат в области определения функции f, а в силу корретности последней функции величины

$$X, Y, Z,\ P_1 = \Pi_1 X^{a_1}Y^{b_1}Z^{c_1},\ \ \ldots,\ P_S = \Pi_S X^{a_S}Y^{b_S}Z^{c_S}$$

лежат в области определения функции f. И наоборот.

Итак, для произвольно фиксированных $X, Y, Z, \ldots$ одновременно имеем

$$\begin{array}{rcl} P_0 & = & X^{a_0}Y^{b_0}Z^{c_0}\varphi\left(\frac{P_1}{X^{a_1}Y^{b_1}Z^{c_1}}, \ldots, \frac{P_S}{X^{a_S}Y^{b_S}Z^{c_S}}\right), \\ P_0 & = & f(X, Y, Z, P_1, \ldots, P_S), \end{array}$$

Что и требовалось.

Обратно, если (13) уже дано, то просто переходим к верхней из предыдущих формул, и она будет корректна.

Теорема доказана.

Сила Π - теоремы (равно как и слабость) в том, что не играет никакой роли источник зависимости f .

Пример. Пусть шар радиуса R движется со скоростью v в газе плотностью ρ . Допустим, что сила сопротивления $F = f(\rho, v, R)$. Анализируя размерности

$$[R] = \mathrm{L}, [\rho] = \mathrm{M/L^3}, [v] = \mathrm{L/T}, [F] = \mathrm{ML/T^2},$$

видим, что первые три независимы и что $[F] = [\rho][R]^2[v]^2$. В силу Π -теоремы $F/\rho R^2 v^2 = f(1, 1, 1) = C$. Хотя значение C установить мы не можем, ясно, что

$$F = C\rho R^2 v^2,$$

т. е. сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости. Это — знание. Разумны ли допущения — покажет опыт.

Советы на будущее. Формула (14) позволяет нам в случае необходимости действовать по следующей схеме.

В уравнениях (каких-то), которые надо решить для получения зависимости f , полагаем $X = Y = Z = 1$; уравнения становятся проще, и мы довольно скоро приходим к выражению

$$P_0 = \varphi(P_1, \ldots, P_S),$$

после чего заменяем P_0 , ... , P_S их безразмерными комбинациями и в итоге имеем искомое:

$$P_0 = X^{a_0} Y^{b_0} Z^{c_0} \varphi\left(\frac{P_1}{X^{a_1} Y^{b_1} Z^{c_1}}, \ldots, \frac{P_S}{X^{a_S} Y^{b_S} Z^{c_S}}\right).$$

Если в уравнениях только два размерно независимых параметра, то можно действовать по аналогичной схеме, не обращая внимания на третью независимую размерность.

В классической динамике значение метода безразмерных комбинаций почти целиком сводится к приемам, позволяющим уменьшить число параметров (то есть облегчить выкладки за счет уменьшения числа вовлекаемых в работу букв).

Подлинный размах этот метод приобретает в механике сплошных сред.

1. Прямолинейное движение

Надо предчувствовать (или поверить), что в этом разделе высвечиваются многие явления, типичные для многих и многих механических систем. Просто теоремы, объясняющие сведение «сложных» систем к нескольким простым, эквивалентным динамике одной точки, еще не рассказаны.

Пусть точка движется по прямой (оси Ox) под действием силы $\boldsymbol{F} = F\boldsymbol{e}_x$, направленной вдоль этой же прямой. Мы помним про закон Ньютона $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$, а для величины F мы обязательно напишем какую-нибудь формулу, выражающую воздействие на точку со стороны какого-то иного объекта: (1) $F = -mg$ для силы тяжести (ось x идет вверх), (2) $F = -kx$ для упругой силы (пружина), (3) $F = -c\dot{x}$ для трения в вязкой жидкости (эта сила направлена против несколько объектов), например, $F = -kx - c\dot{x}$ выражает наличие и пружины, и жидкости.

Обобщим: при движении по прямой мы будем писать

$$m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x}). \tag{15}$$

где F – некоторое явное выражение перечисленных переменных. Это есть не что иное, как *дифференциальное уравнение второго порядка.* Его решение - функция $x(t)$, которая при подстановке дает тождество $\ddot{x}(t) = F(t, x(t), \dot{x}(t))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Частное решение* уравнения Ньютона – это функция $x(t)$ такая, что

$$m\frac{d^2}{dt^2}x(t) \equiv F(t, x(t), \frac{d}{dt}x(t)).$$

Получение таких решений и есть то самое предвычисление, о котором шла речь. Сравнивая решения с наблюдениями, можно делать выводы, хорошо ли подобрали исходное выражение для сил. Таким образом, мы имеем математическую *модель* реального объекта; эта модель может быть проще и сложнее, грубее и точнее. Идеал – это достаточно простая и вместе с тем достаточно точная модель. Найти ее – научное искусство.

Частных решений много; решение единственно (напоминаем, что правые части считаем гладкими), если заданы *начальные условия:*

$$\text{при} \quad t = t_I \quad \text{справедливо} \quad x\big|_{t_I} = x_I, \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t_I} = \dot{x}_I,$$

где $t_I, x_I, \dot{x}_I$ – нужные нам величины *начального момента времени, начального положения и начальной скорости.* Такое решение обозначается $x(t, t_I, x_I, \dot{x}_I)$ и называется *решением задачи Коши* для уравнения Ньютона. Ясно, что с течением времени t каждое частное решение $x(t)$ и его скорость $\dot{x}(t)$, вообще говоря, «проходят» по разным начальным условиям, так что существенно различные решения образуют *двухпараметрическое семейство,* что принято записывать в виде *общего решения* $x(t, c_1, c_2)$, где c_1 и c_2 – так называемые *произвольные константы.*

В большинстве реальных задач уравнение Ньютона – *автономное:*

$$m\ddot{x} = F(x, \dot{x}),$$

то есть не содержащее время явным образом (примеры, кроме $Л_з$ и $Л_к$, автономны). Основное свойство автономных систем: если $x(t)$ – решение, то $x(t-\tau)$ – тоже решение для всякого τ. Поэтому постановка задачи Коши для автономных систем обычно отталкивается от $t_I = 0$.

Решение вида $x(t)=x^* = const$ называется *равновесием.* Оно возможно тогда и только тогда, когда $F(x^*, 0)=0$. В теории часто принимается $x^*=0$, имея в виду замену переменной $x := x - x^*$.

Часто величины $x(t), \dot{x}(t)$ разумно считать *малыми,* то есть с принятой точностью вычислений писать $x^2 = 0$ и т.п. Разложим F в ряд Маклорена в окрестности точки $x=0, \dot{x}=0$:

$$F(x, \dot{x}) = F(0,0) + \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{0,0} x + \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right|_{0,0} \dot{x} + \ldots.$$

Отбросим члены ... и переобозначим коэффициенты:

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x}.$$

Таким образом, некоторые автономные линейные задачи, которые мы сейчас перечислим, приближенно описывают многие автономные системы вблизи соответствующего равновесия:

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} \quad \triangleright \text{ движение только с вязким трением;}$$
$$m\ddot{x} = -kx \quad \triangleright \text{ гармонический осциллятор;}$$
$$m\ddot{x} = kx \quad \triangleright \text{ движение под действием „отталкивающей пружины“;}$$
$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} \quad \triangleright \text{ осциллятор с вязким трением;}$$
$$m\ddot{x} = -mg - kx \quad \triangleright \text{ гармонический осциллятор в поле тяжести;}$$
$$m\ddot{x} = -mg - kz - c\dot{z} \quad \triangleright \text{ осциллятор с вязким трением в поле тяжести.}$$

Если про параметры ничего не сказано, то они считаются положительными. Отсюда обилие минусов во всех этих формулах: так отражается физически более естественная обстановка. Возможны и другие примеры такого типа.

Для всех этих задач надо уметь выписывать общее решение, давать качественное описание поведения решений, решать задачу Коши. Вскорости мы к этому вернемся в более широком контексте.

(16) **Первый интеграл.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Первый интеграл* уравнения Ньютона – это функция $H(t, x, \dot{x})$ такая, что если подставить в нее любое частное решение, т.е. вычислить сложную функцию $H(t, x(t), \dot{x}(t))$, то всякий раз получится константа, но не одна и та же для всех решений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Фазовая плоскость* – это плоскость с координатами $x, \dot{x}$.

Пусть уравнение Ньютона

$$m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x})$$

имеет частное решение $x(t)$. Можно взять производную по t и начать рисовать на фазовой плоскости *фазовую кривую* $(x(t), \dot{x}(t))$ (заданную в параметрическом виде). Если $\dot{x} > 0$ (верхняя полуплоскость), $\frac{dx}{dt} > 0$ и потому координата $x(t)$ возрастает, то есть движение по фазовой кривой происходит вправо. Если $\dot{x} < 0$ (нижняя полуплоскость), то влево. Кривая может пересекать ось x. Как? Надо порассуждать. Начнем с того, что вблизи $t = t_1$ разложим $x(t)$ по формуле Тейлора:

$$x(t) = x(t_1) + \dot{x}(t_1)(t - t_1) + \ddot{x}(t_1)\frac{(t - t_1)^2}{2} + O((t - t_1)^3) =$$

$$= x_1 + \dot{x}_1(t - t_1) + \frac{1}{m}F(t_1, x_1, \dot{x}_1))\frac{(t - t_1)^2}{2} + O((t - t_1)^3).$$

Если $\dot{x}_1 \neq 0$, то в достаточно малой окрестности t_1 доминирует слагаемое с первой степенью по $t - t_1$. Например, если $\dot{x}_1 > 0$, то при $t > t_1$ смещение происходит в сторону скорости.

Мы говорим, что при $t{=}t_1$ имеет место *мгновенная остановка,* если $\dot{x}_1 = 0$. Разложение Тейлора приобретает вид

$$x(t) = x_1 + \frac{1}{m}F(t_1, x_1, 0)\frac{(t - t_1)^2}{2} + O((t - t_1)^3).$$

Если $F(t_1, x_1, 0) \neq 0$, то в малой окрестности t_1 доминирует слагаемое со второй степенью по $t - t_1$, так что $x(t)$ смещается в сторону действия силы для всех t, близких к t_1. Вычислим *фазовую скорость*

$$\frac{d}{dt}(x, \dot{x}) = (\dot{x}, \ddot{x}) = (\dot{x}, \frac{F}{m}).$$

В точке остановки $\frac{d}{dt}(x,\dot{x})|_{t_1}=(0,\frac{F}{m})$, так что фазовая скорость отлична от нуля тогда и только тогда, когда $F\neq 0$. При этом фазовая кривая пересекает ось x перпендикулярно последней и вогнута в сторону действия силы.

АВТОНОМНЫЙ СЛУЧАЙ: $F=F(\dot{x},x)$. Тогда

$$m\ddot{x}=F \Longleftrightarrow \frac{dx}{dt}=\dot{x},\ \frac{d\dot{x}}{dt}=\frac{F(\dot{x},x)}{m}. \tag{17}$$

Назовем $(x,\dot{x})$ – *состоянием,* а плоскость состояний – *фазовой плоскостью.* Решения системы – это пары функций $(x(t),\dot{x}(t))$, задающие на плоскости состояний *фазовые кривые.*

Свойства фазовых кривых:

(1) в верхней полуплоскости кривые идут направо, в нижней налево;

(2) если фазовая кривая пересекает ось x, то обязательно под прямым углом;

(3) состояние равновесия возможно только на оси x.

Решение вида $x(t)=x^*=const$ называется *равновесием* и ищется из *уравнения равновесия* $F(x^*,0)=0$. Для него $\dot{x}(t)\equiv 0$. Итог: если фазовая кривая автономной задачи оказалась на оси x с нулевой фазовой скоростью, то эта кривая является точкой и остается на оси все время.

Фазовый портрет автономного уравнения Ньютона – это изображение нескольких типичных или, наоборот, исключительных фазовых кривых, дающее достаточно полное представление о поведении решений.

Если у нас есть первый интеграл H, разумеется, мы по-прежнему считаем, что H существенно зависит от своих переменных, то есть $\left(\frac{dH}{dx}\right)^2+\left(\frac{dH}{d\dot{x}}\right)^2\not\equiv 0$. Тогда уравнения

$$H(x,\dot{x})=h,\quad h-\text{произвольное число}, \tag{18}$$

задают нечто на фазовой плоскости, вообще говоря, тоже кривые. Они автоматически состоят из одной или нескольких фазовых кривых. Первый интеграл полезен уже для того, чтобы эти кривые рисовать.

С этого места мы долгое время будем иметь дело только с *автономными* задачами. Тогда если $(x(t),\dot{x}(t)$ – фазовая кривая, то $(x(t-\tau),\dot{x}(t-\tau))$ - тоже фазовая кривая. Иными словами, если где угодно на уже нарисованной фазовой кривой взять начальные значения и решить задачу Коши, то после этого движение будет происходить по исходной кривой как геометрическому месту точек.

Напомним, что решение вида $x(t)=x^*=const$ называется *равновесием* и ищется из *уравнения равновесия* $F(x^*,0)=0$. Для него $\dot{x}(t)\equiv 0$. Итог: если фазовая кривая автономной задачи оказалась на оси x с нулевой фазовой скоростью, то эта кривая является точкой и остается на оси все время.

Для автономной системы будем пользоваться первым интегралом вида $H(x,\dot{x})$, то есть не содержащим явно время. (Никакой теоремы за этим нет; существуют автономные системы с неавтономным интегралом.) Разумеется, мы по-прежнему считаем, что H существенно зависит от своих переменных, то есть $\left(\frac{dH}{dx}\right)^2+\left(\frac{dH}{d\dot{x}}\right)^2\not\equiv 0$. Тогда уравнения

$$H(x,\dot{x})=h,\quad h-\text{произвольное число}, \tag{19}$$

задают нечто на фазовой плоскости, вообще говоря, тоже кривые. Они автоматически состоят из одной или нескольких фазовых кривых. Первый интеграл полезен уже для того, чтобы эти кривые рисовать. *Фазовый портрет* автономного уравнения Ньютона – это изображение нескольких типичных или, наоборот, исключительных фазовых кривых, дающее достаточно полное представление о поведении решений.

Далее, первый интеграл удобен для получения решений. Из (19) можно выразить $\dot{x}=\eta(x,h)$, а это дает нам дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt}=\eta(x,h),$$

в котором разделяются переменные, в силу чего, интегрируя, получаем $t-t_I=\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{\eta(x,h)}=\tau(x,x_I,h)$. Снова обращаем функциональную зависимость и получаем общее решение в виде $x=x(t-t_I,x_I,h)$.

(20) **Интеграл энергии.**

В случае, когда сила зависит только от положения, существует первый интеграл – *интеграл энергии* – вида

$$H(\dot{x}, x) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x).$$

Действительно, подставим сюда решение $x(t)$:

$$\begin{aligned} H(\dot{x}(t), x(t)) = \tfrac{m}{2}[\dot{x}(t)]^2 + V(x(t)) &\equiv const, \\ \tfrac{d}{dt}H(\dot{x}(t), x(t)) &\equiv 0, \\ \tfrac{d}{dt}(\tfrac{m}{2}[\dot{x}(t)]^2 + V(x(t))) = \tfrac{m}{2}2\dot{x}\ddot{x} + V'(x(t))\dot{x} &\equiv 0. \end{aligned}$$

Вывод: должно быть $\dot{x}[F(x(t)) + V'(x(t))] \equiv 0$. Берем $V'(x) = -F(x)$, то есть $V(x) = -\int F(x)\,dx$ – это потенциальная энергия для заданной силы. Схему получения решений (*интегрирование в квадратурах*) мы реализуем чуть позднее.

(21) **Типы особых точек по Пуанкаре и их физическая реализация**

Классификация особых точек векторных полей но плоскости

— или, что то же самое, автономных систем дифференциальных уравнений первого порядка с двумя неизвестными —

была предложена Пуанкаре в возрасте 25-28 лет в его докторской (во французской системе ученый степеней) диссертации и мемуарах "О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями". Сами названия: седло, узел, фокус, центр и другие - также принадлежат Пуанкаре (о чем студентам редко рассказывают), лишь в отношении части вырожденных случаев впоследствии возник разнобой.

Поименованные только что типы надо знать назубок. Более того, следует представлять себе не только их канонические образы в специальных системах координат, но и СПЕЦИАЛЬНОЕ расположение фазовых кривых в случае фазового портрета уравнения второго порядка. При этом правила поведения фазовых кривых, сформулированные в конце предыдущего параграфа, должны строго выполняться.

Достаточно рассмотреть уравнение

$$\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0\ ,$$

но уже не считая параметры обязательно положительными. Тогда можно построить разбиение плоскости (c, k) на кривые и области, каждой их которой соответствует свой тип особой точки и характерный вид фазовых кривых на плоскости.

(22) **Линейные задачи динамики точки**

Простейшими моделями в динамике являются такие, в которых дифференциальные уравнения движения получаются линейными. Решение линейных уравнений в принципе тривиально. Сами модели, однако, не тривиальны в том смысле, что позволяют уловить ряд важных эффектов в поведении механических систем.

Дальнейшее изложение будет прямым перечислением моделей (разумеется, без какой-либо полноты списка), причем

1) каждую модель мы сопроводим наглядным комментарием, и пусть подспорьем будут представления, сохранившиеся от школьного курса физики (например, закон упругости Гука, который здесь не обсуждаем, но используем):

2) следуя традиции, буквенные параметры условимся считать положительными, если не оговорено что-либо иное;

3) всегда начальное мгновение $t_0 = 0$;

4) обязательно рисовать фазовые портреты автономных задач

ДВИЖЕНИЕ ПО ИНЕРЦИИ:

$$m\ddot{x} = 0 \Rightarrow x = x_0 + \dot{x}_0 t.$$

ПАДЕНИЕ:

$$m\ddot{z} = -mg \Rightarrow z = z_0 + \dot{z}_0 t - gt^2/2.$$

ДВИЖЕНИЕ В СРЕДЕ С ВЯЗКИМ ТРЕНИЕМ:

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} \Rightarrow x = x_0 + \frac{m}{c}\,\dot{x}_0\left(1 - e^{-\frac{c}{m}\,t}\right).$$

Точка либо покоится, либо стремится к покою при $t \to \infty$.

ДВИЖЕНИЕ В ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ:

$$m\ddot{z} = -mg - c\dot{z}.$$

Сейчас самое время проиллюстрировать применение метода безразмерных комбинаций. Параметры задачи имеют размерности

$$[m] = \mathrm{M}, [g] = \mathrm{L/T^2}, [c] = \mathrm{M/T},$$

которые, конечно, независимы. Положим $m = g = c = 1$. Тогда

$$\frac{d}{dt}\,\dot{z} = -1 - \dot{z}, \tag{23}$$

$$\dot{z} = -1 + (\dot{z}_0 + 1)e^{-t}, \tag{24}$$

$$z = (z_0 + \dot{z}_0 + 1) - t - (\dot{z}_0 + 1)e^{-t}. \tag{25}$$

Вместо t , $z(z_0)$, $\dot{z}_0$ подставим безразмерные комбинации

$$\frac{ct}{m}, \quad \frac{zc^2}{gm^2}, \quad \frac{\dot{z}_0 c}{gm}.$$

Получим общее решение

$$z = z_0 - \frac{mg}{c}\,t + \frac{m}{c}\,(\dot{z}_0 + \frac{mg}{c})\left(1 - e^{-\frac{c}{m}\,t}\right).$$

Движение всегда стремится к равномерному падению со скоростью mg/c (нетрудно доказать это, не решая уравнения движения).

При $c \mapsto 0$ мы должны получить равноускоренное движение, а тут какой-то нуль в знаменетеле получается... Но ничего страшного! Разложите экспоненту по формуле Тейлора с ошибкой $O((ct/m)^3)$, раскройте скобки, приведите подобные члены и успокойтесь.

ДВИЖЕНИЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ УПРУГОЙ СИЛЫ
(ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР):

$$m\ddot{x} = -kx.$$

Получаются гармонические колебания (осцилляции):

$$x = x_0 \cos\omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\,\sin\omega t = A\cos(\omega t + \varphi).$$

Здесь частота ω , период колебаний T , амплитуда A и начальная фаза φ даются формулами:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}, \tag{26}$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2}}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\dot{x}_0}{\omega x_0}. \tag{27}$$

Важно, что период не зависит от амплитуды.

ОСЦИЛЛЯТОР В ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ:

$$m\ddot{z} = -kz + mg.$$

Те же колебания, но со смещением: равновесие $z_* = mg/k$.

ОСЦИЛЛЯТОР С ВЯЗКИМ ТРЕНИЕМ:

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x}.$$

Назовем коэффициентом затухания число $\chi = c/2m$. Если $\chi < \omega$, то происходят затухающие колебания

$$x = e^{-\chi t}(C_1 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t), \Omega = \sqrt{\omega^2 - \chi^2}.$$

Если $\chi > \omega$, то наблюдается апериодический режим

$$x = C_1 e^{(-\chi+\lambda)t} + C_2 e^{(-\chi-\lambda)t},\ \lambda = \sqrt{-\omega^2 + \chi^2}.$$

Это не все: надо будет фазовые портреты и зависимости координаты от времени рисовать!

(28) **Фазовые портреты консервативных задач**

Первый интеграл удобен для получения решений. Из (18) можно выразить $\dot{x} = \eta(x, h)$, а это дает нам дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \eta(x, h),$$

в котором разделяются переменные, в силу чего, интегрируя, получаем $t - t_I = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\eta(x,h)} = \tau(x, x_I, h)$. Снова обращаем функциональную зависимость и получаем общее решение в виде $x = x(t - t_I, x_I, h)$. Такую схему получения решений (*интегрирование в квадратурах*) мы реализуем очень скоро.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Консервативная задача* – это задача с интегралом энергии. Сейчас это

$$H(\dot{x}, x) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) = h = const. \tag{29}$$

Работа с интегралом энергии – шаг вперед после уравнения Ньютона

$$m\ddot{x} = -V'(x).$$

Зафиксируем произвольно h и в точках интегрального уровня $I_h = \{H(\dot{x}, x) = h\}$ вычислим величину $\gamma = \left(\frac{dH}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dH}{d\dot{x}}\right)^2 = [V'(x)]^2 + [m\dot{x}]^2$. Вблизи точек, где $\gamma \neq 0$, множество I_h имеет вид гладкой кривой. Легко заметить, что фазовая скорость $(\dot{x}, \frac{-V'}{m}) \neq 0$ в тех же точках, то есть движение вдоль I_h происходит с ненулевой скоростью. А где же величина γ и фазовая скорость обращаются в нуль? Как раз в равновесиях, которые, как мы знаем, суть отдельные фазовые кривые. Равновесия ищутся из условия $V'(x) = 0$, то есть являются критическими точками *потенциальной энергии* $V(x)$.

Примеры (как мы вскоре увидим, выражающие нечто типичное).
1. $F = mg$, $V = mgx$; тогда из (29) имеем $x = \frac{h}{mg} - \frac{\dot{x}^2}{2g}$. Фазовые кривые – параболы. Общее решение: $x = x_I + \dot{x}_I t - \frac{gt^2}{2}$. 2. $F = kx$, $V = \frac{1}{2}kx^2$ (упругое притяжение). Фазовые кривые – эллипсы при $h > 0$, равновесие при $h = 0$, пустое множество при $h < 0$. Общее решение $x(t) = x_I \cos \omega t + \frac{\dot{x}_I}{\omega} \sin \omega t$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. 3. $F = -kx$, $V = -\frac{1}{2}kx^2$ (упругое отталкивание). Фазовые кривые – гиперболы при $h > 0$ и $h < 0$ (но по-разному расположенные), пара пересекающихся прямых при $h = 0$. Этот „крест"состоит из пяти фазовых кривых. Нетрудно проверить, что общее решение (без решения задачи Коши) имеет вид $x(t) = C_1 e^{\chi t} + C_2 e^{-\chi t}$, $\chi = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Если $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$, то $\dot{x}(t) = -\chi x(t)$, и $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Это – один из четырех „усов", примыкающих к равновесию при $h = 0$. Мы предъявили два „входящих"уса. Если $\dot{x}(t) = +\chi x(t)$, то $x(t) \to 0$ при $t \to -\infty$ – это „выходящие"усы.

4. (намного менее типичный): $F = -\frac{lx^2}{2}$, $V = \frac{1}{6}lx^3$, $m\dot{x}^2 = 2h - lx^3/3$. Если h=0, то $\dot{x} = \pm(\lambda)(-x)^{3/2}$, $x \leqslant 0, \lambda = \sqrt{l/3m}$. Получается полукубическая парабола. Остальные кривые гладко проходят справа и слева от нее. Кстати, здесь линеаризация дает $m\ddot{x} = 0$, то есть нечто совсем не похожее на исходное уравнение.

Вспомним нечто из математического анализа. Пусть есть функция $V(x)$. В окрестности x=0 (для удобства) имеем:

$$\begin{array}{rcl} V(x) & = & V(0) + \int_0^x V'(\xi)\,d\xi = \\ & = & V(0) + V'(\xi)\ (\xi{-}x)\big|_0^x - \int_0^x (\xi{-}x)\,dV'(\xi) = \\ & = & V(0) + V'(0)x + \int_0^x V''(\xi)(x{-}\xi)\,d\xi = \\ & = & V(0) + V'(0)x + \dfrac{V''(0)}{2}x^2 + \cdots + \dfrac{V^{(n)}(0)}{n!}x^n + \\ & + & \frac{1}{n!}\int_0^x V^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n\,d\xi \end{array}$$

(разложение Тейлора с остаточным членом в интегральной форме).

Можно считать $V(0) = 0$. Предположим, что для некоторого $n \geqslant 0$

$$V'(0){=}V''(0){=}\ldots{=}V^{(n)}(0){=}0,\ V^{(n+1)}(0) = K{\neq}0.$$

Тогда

$$\begin{array}{rcl} V(x) & = & \frac{1}{n!}\int_0^x V^{(n+1)}(\xi)(x{-}\xi)^n\,d\xi = \\ & = & \dfrac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 V^{(n+1)}(xt)(1{-}t)^n\,dt. \end{array}$$

Была сделана замена переменной интегрирования $\xi = xt$. Как видим, $V(x) = x^{n+1}\psi(x)$. Поняв, что тогда $V^{(n+1)}(0){=}(n+1)!\psi(0)$, мы можем написать

$$V(x) = \frac{K}{(n+1)!}\varphi(x), \qquad \varphi(0) = 1.$$

Введем новую переменную $q = x\sqrt[n+1]{\varphi(x)}$; теперь

$$V(x) = \frac{K}{(n+1)!}q^{n+1}, \qquad H = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{K}{(n+1)!}q^{n+1} = h.$$

Мы переписали интеграл энергии, фактически сделав замену переменных на плоскости: $(x, \dot{x}) \mapsto (q, \dot{x})$. Эта замена смещает вертикальные прямые на плоскости, причем вблизи нуля она близка к тождественной. Поэтому она почти не портит фазовые портреты. При $n = 0, 1, 2$ она приводит портрет к одному их стандартных образов, уже полученных в примерах. Поэтому эти образы будут встречаться почти во всех фазовых портретах, но с небольшим искажением формы.

(30) Обратимость консервативных задач

Потенциальная энергия V определена с точностью до постоянной. То, что $F = F(x)$, имеет такие следствия: решения уравнения Ньютона допускают

А) сдвиг по времени: если $x(t)$ — движение, то и $x(t+\tau)$ тоже движение (свойство автономности);

Б) ИНВЕРСИЮ ВРЕМЕНИ: если $x(t)$ — движение, то и $x(-t)$ тоже движение.

(31) Области возможности движения

Для каждого движения $x(t)$ имеем $H(\dot{x}(t), x(t)) = h$, где константа h определяется по начальным условиям или задается из каких-либо других соображений. Поскольку $m\dot{x}^2/2 \geqslant 0$, при движении всегда выполняется неравенство $V(x(t)) \leqslant h$.

$$\mathfrak{M}^h = \{x : V(x) \leqslant h\}$$

состоит, вообще говоря, из нескольких связных кусков (рис. 42); в случае, когда один из кусков есть замкнутый отрезок (справа на рис. 42), говорят о движении в потенциальной яме; предполагается, что внутри этого отрезка $V(x) < h$.

Как известно, важным моментом при построении графика функции $V(x)$ является отыскание множества ее критических точек:

$$\{x^* : V'(x^*) = 0\}.$$

Поскольку уравнение Ньютона у нас в силу теоремы имеет вид

$$m\ddot{x} = -V'(x),$$

видим, что критические точки потенциальной энергии имеют прозрачный динамический смысл — каждая из них есть **положение равновесия**: движение $x(t) \equiv x^*$ возможно тогда и только тогда, когда $V'(x^*) = 0$. Энергия равновесия равна

$$h^* = V(x^*). \tag{32}$$

Это — соответствующее x^* критическое значение функции. При изменении h область возможности движения $\mathfrak{M}^h$ тоже меняется, а когда h проходит критическое значение h^* , то, вообще говоря, меняется число связных компонент у $\mathfrak{M}^h$.

Будем говорить, что точка $x_i = x(t_i)$ есть **точка остановки** (точка поворота) для движения $x(t)$, если $\dot{x}(t_i) = 0$, и при этом

$$V'(x_i) \neq 0.$$

Заметим, что тогда $V(x_i) = h$, т. е. мы выходим на границу $\mathfrak{M}^h$. Разложим $x(t)$ в ряд Тейлора в окрестности t_i :

$$x(t) = x_i + \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=t_i}(t - t_i) + \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{t=t_i}\frac{(t-t_i)^2}{2} + O((t-t_i)^3), \tag{33}$$

и воспользуемся **??** с учетом (4):

$$x(t) = x_i - \frac{V'(x_i)}{m}\frac{(t-t_i)^2}{2} + O((t-t_i)^3).$$

При достаточно малых $t - t_i$ изменение $x(t)$ будет определяться вторым слагаемым. Таким образом, движение доходит до точки остановки (до границы $\mathfrak{M}^h$) и поворачивает назад (рис. 43).

Движение $x(t)$ однозначно определяется начальными условиями x_0 , $\dot{x}_0$. Сейчас мы уже знаем, что если $\dot{x}_0 = 0$, то движение либо вечно останется в точке x_0 (при $V'(x_0) = 0$), либо покинет эту точку (при $V'(x_0) \neq 0$) практически равноускоренно. Впредь будем считать $\dot{x}_0 \neq 0$. Тогда dx/dt сохраняет знак в течение некоторого интервала времени, и из интеграла энергии в области $V < h$ (строго меньше) получим

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(h - V(x))},$$

так что $x = x(t)$ — монотонная функция и имеет обратную $t = t(x)$. Ее можно найти:

$$\pm\frac{dx}{\sqrt{(2/m)(h - V(x))}} = dt, t - t_0 = \pm\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dx}{\sqrt{2/m(h - V(x_0))}}. \tag{34}$$

Чтобы получить $x(t)$, нам надо проделать алгебраические действия, вычислить определенный интеграл и взять обратную функцию. Решение с помощью этих оцераций составляет ИНТЕГРИРОВАНИЕ В КВАДРАТУРАХ, которое, как правило, неисполнимо в элементарных функциях.

Теорема. **Пусть движение $x(t)$ с энергией h происходит в потенциальной яме $[x_2(h), x_1(h)]$, причем x_i — точки остановки: $V'(x_i) \neq 0$. Тогда $x(t)$ есть ПЕРИОДИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ, т. е. $x(t+\tau) = x(t)$, где**

$$\tau(h) = 2 \int\limits_{x_2(h)}^{x_1(h)} \frac{dx}{\sqrt{2/m(h - V(x))}}. \tag{35}$$

Это движение попеременно достигает x_1 и x_2 .

Доказательство. Будем считать $\dot{x}_0 > 0$. Тогда в некотором интервале времени $\frac{dx}{dt} > 0$, так что в (34) берем знак $+$. Неприятность в том, что при $x \to x_1$ подкоренное выражение стремится к бесконечности.

Лемма Адамара. Если $\chi(x)$ — гладкая функция, $\chi(0) = 0$, то $\chi(x) = x\psi(x)$, причем $\psi(0) = \chi'(0)$. В самом деле,

$$\psi(x) = \int\limits_0^1 \chi'(x \cdot t)\, dt \Rightarrow \chi(x) = \chi(x) - \chi(0) = \tag{36}$$

$$= \int\limits_0^x \chi'(\xi)\, d\xi = \int\limits_0^1 \chi'(xt)\, d(xt) = x\psi(x), \tag{37}$$

что и требовалось. В силу леммы

$$\frac{2}{m}\,(h - V(x)) = (x - x_1)\psi(x), \psi(x_1) = -\frac{2}{m}\,V'(x_1) \neq 0.$$

Следовательно,

$$t - t_0 = \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{|x - x_1|\,|\psi(x)|}},$$

причем ψ — ограниченная функция. Этот интеграл сходится, т. е. $t \to t_1$ при $x \to x_1$, и наоборот. Отсюда следует, что $x(t)$ придет в сколь угодно малую окрестность x_1 , в то время как движение в некоторой конечной окрестности нами уже изучено: точка дойдет до x_1 и повернет назад (рис. 43). Потом она дойдет до x_2 и снова повернет назад. Через время

$$\tau = \int\limits_{x_0}^{x_1} - \int\limits_{x_1}^{x_2} + \int\limits_{x_2}^{x_0} = 2 \int\limits_{x_2}^{x_1}$$

точка снова будет в x_0 со скоростью $\dot{x}(\tau) > 0$. Из интеграла энергии $\dot{x}(\tau) = \dot{s}(0)$. В итоге у движений $x(t-\tau)$, $x(t)$ начальные условия совпадают, т. е. и сами они совпадают по теореме единственности решения. Доказательство завершено.

Обратим внимание на точку минимума $\bar{x}$, заведомо имеющуюся внутри потенциальной ямы. При $h \to V(\bar{x})$ границы $x_i(h)$ стягиваются, и формула для $\tau(h)$ не позволяет понять поведение τ .

Поэтому взамен (35) будет выведена

(38) **Формула Линдштедта**

Допустим, что $\bar{x} = 0$ — точка невырожденного минимума:

$$V(0) = 0, V'(0) = 0, V''(0) = k > 0.$$

Пусть l — какой-либо параметр размерности длины. Положим

$$V'''(0) = \frac{k}{l}\,\gamma, V''''(0) = \frac{k}{l^2}\,\delta,$$

где γ , δ — безразмерные величины. Тогда при достаточно малых h период колебаний

$$\tau(h) = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\left(1 + \frac{5\gamma^2 - 3\delta}{24}\,\frac{h}{kl^2} + O\left(\left(\frac{h}{kl^2}\right)^2\right)\right)$$

(величина $\eta = h/kl^2$ называется безразмерной энергией; мы придали формуле именно такой вид, ибо на практике говорить о «малости» имеет смысл только для безразмерных величин; к этому мы еще вернемся).

Доказательство. Величины m , l , k размерно независимы, так что их можно принять равными единице.

Лемма Морса. Существует замена переменной $x = f(q)$ такая, что $V(f(q)) = q^2/2$.

Действительно, применим дважды лемму Адамара:

$$V(x) = x\psi(x), \psi(0) = V'(0) = 0 \Rightarrow \psi(x) = \frac{x}{2}\,\varphi(x) \Rightarrow \tag{39}$$

$$\Rightarrow V(x) = \frac{x^2}{2}\,\varphi(x), \varphi'(0) = V''(0) = 1. \tag{40}$$

Осталось положить $q(x) = x\sqrt{\varphi(x)}$.

Неравенство $V(x) \leqslant h$ приобретает вид $|q| \leqslant \sqrt{2h} = a$. Период

$$\tau(h) = 2\int\limits_{x_2(h)}^{x_1(h)} \frac{dx}{\sqrt{2(h - V(x))}} = 2\int\limits_{-a}^{a} \frac{f'(q)\,dq}{\sqrt{2h - q^2}}.$$

Положим $q = \sqrt{2h}\,\sin\xi$. Тогда

$$\tau(h) = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f'(\sqrt{2h}\,\sin\xi)\,d\xi.$$

Разложим f в ряд Тейлора:

$$f = q + \frac{B}{2}\,q^2 + \frac{C}{6}\,q^3 + \frac{D}{24}\,q^4 + O(q^5), \tag{41}$$

$$f' = 1 + Bq + \frac{C}{2}\,q^2 + \frac{D}{6}\,q^3 + O(q^4). \tag{42}$$

Поэтому

$$\tau(h) = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (1 + B\sqrt{2h}\,\sin\xi + Ch\sin^2\xi + \frac{D}{6}\,\sqrt{2h^3}\,\sin^3\xi + \tag{43}$$

$$+O(h^2\sin^2\xi))\,d\xi. \tag{44}$$

Интегралы от нечетных функций $\sin\xi$ и $\sin^3\xi$ равны нулю, и

$$\tau(h) = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (1 + Ch\sin^2\xi)\,d\xi + O(h^2) = \tag{45}$$

$$= 2\pi\left(1 + \frac{1}{2}\,Ch + O(h^2)\right). \tag{46}$$

Осталось вычислить C . Для этого подставим разложение для $s = f(q)$ в разложение

$$V(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{\gamma x^3}{6} + \frac{\delta x^4}{24} + O(x^5).$$

Получим

(47) $$\frac{q^2}{2} = \frac{q^2}{2} + \left[\frac{B}{2} + \frac{\gamma}{6}\right] q^3 + \left[\frac{\delta}{24} + \frac{B^2}{8} + \frac{2C}{2\cdot 6} + \frac{3\gamma B}{2\cdot 6}\right] q^4 + O(q^5),$$

(48) $$B = -\frac{\gamma}{3}, C = \frac{5\gamma^2 - 3\delta}{12}.$$

Доказательство на этом закончено.

Из разложения $f(q)$ видно, что величины q и x малы одновременно. Если мала безразмерная амплитуда колебаний

$$q/l = \sqrt{2h/kl^2},$$

то безразмерной энергией η уже можно пренебречь, и период получается равным

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

если же мала энергия колебаний, то

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\left(1 + \frac{5\gamma^2 - 3\delta}{24}\,\frac{h}{kl^2}\right).$$

Нам осталось рассмотреть

(49) **Асимптотические движения**

которые происходят в случае, когда одна из границ нетривиальной ($x_1 \neq x_2$) потенциальной ямы является не точкой остановки, а положением равновесия:

$$V'(x_1) = 0$$

Пусть $\dot{x}_0 > 0$. По лемме Адамара, примененной дважды, имеем

$$\frac{2}{m}\,(h - V(x)) = (x - x_1)^2\varphi(x),$$

причем $\varphi(x_1) \neq 0$, если критическая точка невырождена, т. е. $V''(x_1) \neq 0$. Впрочем, это не обязательно. Видим, что

$$t - t_0 = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{dx}{|x - x_1|\sqrt{|\varphi(x)|}},$$

т. е. интеграл расходится. Это значит, что

$$t \to \infty \quad \Rightarrow \quad x(t) \to x_1.$$

Поскольку время допускает инверсию, существует движение $x^-(t) = x(-t)$ такое, что

$$t \to -\infty \quad \Rightarrow \quad x^-(t) \to x_1.$$

Такое движение выходит из сколь угодно малой окрестности точки x_1 , что указывает на неустойчивость имеющегося равновесия. Напротив, в окрестности точки минимума движение носит колебательный характер, т. е. устойчиво. Эти соображения легко довести до строгих доказательств.

Движения в $\mathfrak{M}^h$ типа $(-\infty, x_3]$ просто уходят в бесконечность.

(50) **Простой резонанс**

Речь идет об уравнении

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \Phi(t), \Phi(t+\tau) = \Phi(t)$$

(как обычно, полагаем, что $m, c, k > 0$).

ОСЦИЛЛЯТОР С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ:

$$m\ddot{x} = -kx + \Phi\cos\nu t.$$

Для выкладок (их мы опустим) удобно положить равными единице независимые параметры m , k , Φ . Результат: к гармоническим колебаниям $A\cos(\omega t + \varphi)$ прибавляются частные решения

$$\frac{\Phi}{k = m\nu^2}\cos\nu t \qquad (\nu \neq \omega), \tag{51}$$

$$\frac{\Phi\omega t}{2k}\sin\omega t \qquad (\nu = \omega), \tag{52}$$

так что

А) при $\nu \approx \omega$ возникают биения — колебания с частотой $(\omega + \nu)/2$ и амплитудой, меняющейся (рис. 69, *а*) с периодом

$$\tau = \frac{4\pi}{|\omega - \nu|},$$

максимум которой стремится к бесконечности при $\nu \to \omega$;

Б) если $\nu = \omega$, то получается раскачивание — колебания с амплитудой, растущей примерно линейно (рис. 69, *б*). Оба этих явления совокупно представляют собой так называемый

резонанс

(первая половина биения поначалу неотличима от раскачивания).

НАПОМИНАНИЕ: линейное дифференциальное уравнение $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ называется *однородным*. Если $x^{(1)}(t)$ и $x^{(2)}(t)$ – два его решения, то для любых c_1 и c_2 $c_1x^{(1)}(t) + c_2x^{(2)}(t)$ – тоже решение.

Эта формула дает общее решение однородного уравнения при условии, что решения $x^{(1)}(t)$ и $x^{(2)}(t)$ линейно независимы, то есть не существует их нетривиальной линейной комбинации, тождественно равной нулю.

Общее решение однородного уравнения будем обозначать $x_{\text{об.од.}}(t)$.

Вернемся к неоднородному уравнению. Пусть $x_A(t)$ – какое-то решение уравнения с правой частью $\varphi_A(t)$, а $x_B(t)$ – решение уравнения с правой частью $\varphi_B(t)$. Тогда их сумма – решение неоднородного уравнения с правой частью $\varphi_A(t) + \varphi_B(t)$.

ЧАСТНОЕ СЛЕДСТВИЕ: Взяв $\varphi_A = \varphi$, $\varphi_B = 0$, получим, что сумма частного решения неоднородного уравнения и любого решения однородного – решение неоднородного уравнения.

Наконец,

$$x_{\text{об.неод.}}(t) = x_{\text{част.неод.}}(t) + x_{\text{об.од.}}(t).$$

Пусть $\Phi(t) = \Phi\cos(\nu t)$ ($\tau = \frac{2\pi}{\nu}$). Положим для простоты $m = k = \Phi = 1$. Получим уравнение

$$\ddot{x} + x = \cos\nu t.$$

Будем искать решение в виде $a\cos\nu t + b\sin\nu t$.

$$x_{\text{ч}}(t) = a\cos\nu t + b\sin\nu t.$$

$$\ddot{x}_{\text{ч}} = -\nu^2(a\cos\nu t + b\sin\nu t).$$

$$(\nu^2 + 1)(a\cos\nu t + b\sin\nu t) = \cos\nu t.$$

Отсюда $b = 0, a = \frac{1}{1-\nu^2}$. Тогда

$$x_{\text{ч}}(t) = \frac{1}{1-\nu^2}\cos\nu t.$$

В общем случае

$$x_{\text{ч}}(t) = \frac{\Phi/m}{\omega^2 - \nu^2}\cos\nu t, \text{ где } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Общее решение (в случае $m = k = \Phi = 1$):

$$\frac{1}{1-\nu^2}\cos\nu t + c_1\cos t + c_2\sin t.$$

Найдем решение, удовлетворяющее условию $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$. Оно имеет вид

$$x(t) = \frac{1}{1-\nu^2}(\cos\nu t - \cos t).$$

Поиск такого решения в общем случае оставим читателю.

Необходимо отметить, что полученное решение не подходит, если $\nu = \omega$. Совпадение частот и называется *резонансом*.

Вновь полагаем $k = m = \Phi = 1$, кроме того, $\nu = 1 + \varepsilon, \varepsilon \ll 1, \varepsilon \neq 0$. Для определенности займемся движением из состояния покоя ($x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$).

$$x(t) = \frac{1}{1-\nu^2}(\cos\nu t - \cos t) = -\frac{1}{1-\nu^2}2\sin\frac{1+\nu}{2}t\sin\frac{\nu-1}{2}t.$$

$$x_\varepsilon(t) = \frac{-2}{1-(1+\varepsilon)^2}\sin(1+\frac{\varepsilon}{2})t\sin\frac{\varepsilon}{2}t = \frac{1}{\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2}}\sin(1+\frac{\varepsilon}{2})t\sin\frac{\varepsilon}{2}t.$$

Зафиксируем произвольное t и устремим ε к нулю.

$$x_0(t) = \frac{t}{2}\sin t.$$

Отсюда при $\nu = 1$ ($\varepsilon = 0$) частное решение $x_{\text{ч}}(t) = \frac{t}{2}\sin t$.

Полезно нарисовать график зависимости амплитуды частного решения от частоты вынуждающей силы (амплитудно-частотная характеристика). При ν, близком к ω, амплитуда стремится к бесконечности.

(53) **Вынужденные колебания**

Рассмотрим задачу, в которой присутствует трение. Как обычно, полагаем $m, c, k > 0$.

ОСЦИЛЛЯТОР С ВЯЗКИМ ТРЕНИЕМ И ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ:

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + \Phi\cos\nu t.$$

Этой важной задаче уделяется много внимания в курсах теории колебаний (причем в качестве периодического слагаемого в правой части берется, конечно, не только простейший косинус). Мы сразу предупредим, указанием на то, что все движения стремятся к вынужденному колебанию

$$x = \frac{\Phi}{m\sqrt{(\omega^2-\nu^2)^2 + 4\chi^2\nu^2}}\cos\left(\nu t + \operatorname{arctg}\frac{2\chi\nu}{(\omega^2-\nu^2)}\right).$$

Рассмотрим однородное уравнение. Все его решения стремятся к нулю. Это сразу же вытекает из точного вида решения. Положим $\lambda = \frac{c}{2m}$. Если
$\lambda < \omega$, то $x_{\text{об.од.}} = e^{-\lambda t}(c_1\cos\sqrt{\omega^2-k^2}t + c_2\sin\sqrt{\omega^2-k^2}t$;
$\lambda = \omega$, то $x_{\text{об.од.}} = (c_1 + c_2 t)e^{-\lambda t}$;
$\lambda > \omega$, то $x_{\text{об.од.}} = c_1 e^{(-\lambda-\sqrt{\omega^2-k^2})t} + c_1 e^{(-\lambda+\sqrt{\omega^2-k^2})t}$.

Вернемся к неоднородному уравнению $m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=\Phi\cos\nu t$. Если у него есть периодическое частное решение $x_{\text{ч.п.}}(t)$, то

$$x_{\text{об.неод}}(t)=x_{\text{ч.п.}}(t)+x_{\text{об.од}}(t)\to x_{\text{ч.п.}}(t).$$

Будем искать $x_{\text{ч.п.}}(t)$ в виде $x_{\text{ч.п.}}(t)=a\cos(\nu t+\varphi)$. (Вновь $m=k=\Phi=1$, тогда $c=2\lambda$.)

$$\dot{x}_{\text{ч.п.}}=-a\nu\sin(\nu t+\varphi).$$

$$\ddot{x}_{\text{ч.п.}}=-a\nu^2\cos(\nu t+\varphi).$$

Подставим это в $\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+x=\cos\nu t$.

$$a(1-\nu^2)\cos(\nu t+\varphi)-2a\nu\lambda\sin(\nu t+\varphi)=\cos(\nu t+\varphi-\varphi)=$$

$$=\cos(\nu t+\varphi)\cos\varphi+\sin(\nu t+\varphi)\cos\varphi.$$

Отсюда

$$a(1-\nu^2)=\cos\varphi,\quad -2a\nu\lambda=\sin\varphi.$$

$$tg\varphi=-\frac{2\nu\lambda}{1-\nu^2}.$$

$$a=\frac{1}{\sqrt{(1-\nu^2)^2+4\nu^2\lambda^2}}.$$

Здесь опять полезно нарисовать график зависимости амплитуды вынужденного от частоты вынуждающей силы (амплитудно-частотная характеристика). Нас ждет неожиданность: При ν, равном $\sqrt{\omega^2-2\chi^2}$, а не самому ω, амплитуда имеет максимум. А вот ЭНЕРГИЯ вынужденного колебания максимальна как раз при $\nu=\omega$. Проверьте.

ВОПРОС: Что, если периодическая функция $\Phi(t)$ – не просто косинус? Например,

$$\Phi(t)=\sum\Phi_p\cos(p\nu t+\alpha_p)$$

($p\in I$, где I – некоторое множество).

Чтобы найти частное решение, достаточно найти частные решения в отдельности для каждого слагаемого:

$$x_{\text{ч}}(p)=\frac{\Phi/m}{\omega^2-p^2\nu^2}\cos(p\nu t+\alpha_p).$$

У нас $\nu=\frac{2\pi}{p}\tau$ – единственный параметр, на который накладывается несколько ограничений (неприятности будут, если $\nu=\frac{\omega}{p}$).

Заметим, что при наличии трения предельные движения также складываются.

(54) **Первые шаги теории возмущений**

Рассмотрим функцию $\varphi(x)$, причем x взят в виде $x=a_0+\varepsilon a_1+\varepsilon^2a_2+\ldots$, где ε – малая величина ($\varepsilon\ll1$). Разложение φ по формуле Тейлора, получим

$$\varphi(x)=\varphi(a_0)+\varepsilon\varphi'(a_0)a_1+o(\varepsilon^2),$$

что с принятой точностью вычислений ($\varepsilon \ll 1$ означает, что $\varepsilon^2 \approx 0$) дает

$$\varphi(x) = \varphi(a_0) + \varepsilon\varphi'(a_0)a_1. \tag{55}$$

Пусть дано уравнение Ньютона:

$$m\ddot{x} = F_\varepsilon(x) = F_0(x) + \varepsilon F_1(x) + o(\varepsilon^2) \text{ (опять } \varepsilon \ll 1).$$

Все это нужно, если на тело действует целое семейство сил. Например, для пружины имеем $F = -kx$, но это в реальности не совсем верно. Просто можем к силе добавить малую величину: $F = -kx + \varepsilon x^2$.

Пусть $\hat{x}$ – положение равновесия в невозмущенном случае ($\varepsilon = 0$). Насколько оно сместится при $\varepsilon \neq 0$? Чтобы ответить на этот вопрос, нужно решать уравнение $F_\varepsilon(x) = 0$, но часто оно не решается в явном виде. Поэтому мы будем искать равновесие в виде $\hat{x_\varepsilon} = \hat{x} + \varepsilon\hat{x_1} + \dots$. Так как полагаем $\varepsilon^2 = 0$, то нужно найти лишь $\hat{x_1}$. Подставляя $\hat{x_\varepsilon}$ в уравнение $F_0(x) + \varepsilon F_1(x) + \dots = 0$ и учитывая (55), получим

$$F_0(\hat{x} + \varepsilon\hat{x_1}) + \varepsilon F_1(\hat{x} + \varepsilon\hat{x_1}) = 0$$

и, после разложения в ряд по ε, получим

$$F_0(\hat{x}) + \varepsilon[F_0'(\hat{x})\hat{x_1} + F_1(\hat{x})] + o(\varepsilon^2) = 0. \tag{56}$$

Но $F_0(\hat{x}) = 0$, так как $\hat{x}$ – равновесие при $\varepsilon = 0$. Тогда чтобы (56) выполнялось при всех ε , надо потребовать, чтобы было

$$\hat{x_1} = -\frac{F_1(\hat{x})}{F_0'(\hat{x})} \tag{57}$$

(как видим, при $F_0'(\hat{x}) = 0$ наша теория не работает).

ПРИМЕР. Проиллюстрируем, что происходит:
Если имеем ситуацию, изображенную на рис. 14.1, то при малом изменении $F_\varepsilon(x)$ все равно будет пересекаться с Ox. Если имеем ситуацию, изображенную на рис. 14.2, то при малейшем изменении можем получить, что $F_\varepsilon(x)$ не пересекается с осью Ox.

Мы имеем, что

$$F(x) = -\frac{dV}{dx} \;\Rightarrow\; F_\varepsilon(x) = -\frac{d}{dx}V_\varepsilon(x).$$

Положение равновесия – это критическая точка $V_\varepsilon(x)$. Представляем $V_\varepsilon(x)$ в виде $V_\varepsilon(x) = V_0(x) + \varepsilon V_1(x) + \dots$. Тогда для уравнения $m\ddot{x} = -V_\varepsilon'(x)$ результат (57) принимает вид

$$\hat{x_1} = -\frac{V_1'(\hat{x})}{V_0''(\hat{x})}$$

(иллюстрацией является рис 14.3).

Насколько изменится критическое значение V при малых ε? При $\varepsilon = 0$ было $h_0 = V_0(\hat{x})$, а при малых ε имеем $h_\varepsilon = h_0 + \varepsilon h_1 + \dots = V_\varepsilon(\hat{x_\varepsilon})$. Используя (55) и тот факт, что $V_0'(\hat{x}) = 0$ ($\hat{x}$ – критическая точка V_0), получим

$$\begin{aligned} V_\varepsilon(\hat{x_\varepsilon}) &= V_0(\hat{x} + \varepsilon\hat{x_1}) + \varepsilon V_1(\hat{x} + \varepsilon\hat{x_1}) = \\ &= V_0(\hat{x}) + V_0'(\hat{x})\varepsilon\hat{x_1} + \varepsilon V_1(\hat{x}) \;\Rightarrow\; h_1 = V_1(\hat{x}). \end{aligned}$$

Рассмотрим уравнение:

$$m\ddot{x} = F_0(x) + \varepsilon F_1(t, x, \dot{x}, \varepsilon). \tag{58}$$

Полагаем, что при $\varepsilon = 0$ мы умеем решать это дифференциальное уравнение. Здесь εF_1 – добавочная сила (например, трение и т.д.) Решение зависит от ε, т.е. получим решение $x_\varepsilon(t)$. Ищем решение $x_\varepsilon(t)$ с начальными условиями: при $t = t_I$ должно быть $x_\varepsilon = x_I + \varepsilon\xi_I$ и $\dot{x_\varepsilon} = \dot{x_I} + \varepsilon\eta_I$. Решение ищем в виде

$x_\varepsilon = x(t) + \varepsilon\xi(t)$, причем $\xi(t_I) = \xi_I$ и $\dot\xi(t_I) = \eta_I$, а также $x(t_I) = x_I$ и $\dot x(t_I) = v_I$. Подставим $x_\varepsilon(t)$ в (58) и разложим по ε. Получаем слагаемое без ε: $m\ddot x(t) = F_0(x(t))$ – это значит, что $x(t)$ – решение при $\varepsilon = 0$, так что здесь ничего интересного. Посмотрим на члены с ε:

$$m\varepsilon\ddot\xi = \varepsilon(F_0'(x(t))\xi(t) + F_1(t, x(t), \dot x(t), 0)),$$

но $F_0'(x(t))$ и $F_1(t, x(t), \dot x(t), 0)$ вычисляются, то есть $\xi(t)$ – решение дифференциального уравнения

$$m\ddot\xi = \Lambda(t)\xi + \Psi(t),$$

где $\Lambda(t) = F_0'(x(t))$ и $\Psi(t) = F_1(t, x(t), \dot x(t), 0)$.

$$H = \frac{m\dot x^2}{2} + V_0(x), \quad F_0(x) = -V_0'(x).$$

$$H(t) - H(t_0) = \int_{t_0}^{t} \frac{dH}{dt}\,dt = \int_{t_0}^{t} \Phi\,dx =$$

$$= \varepsilon\int_{t_0}^{t} F_1(t, x + \varepsilon\xi, \dot x + \varepsilon\dot\xi, \varepsilon)(\dot x + \varepsilon\dot\xi)\,dt.$$

Тогда с принятой точностью вычислений

$$H(t) - H(t_0) = \varepsilon\int_{t_0}^{t} F_1(t, x, \dot x, 0)\dot x\,dt,$$

то есть приближенное изменение энергии вычисляется по невозмущенному движению. Короче, это записывается в виде

$$H(t) - H(t_0) = \varepsilon\int_{t_0}^{t} F_1\,dx,$$

где выражение $F_1\,dx$ называется *элементарной работой силы*, а весь интеграл – *работой силы* F_1 *вдоль невозмущенного движения.* Этой формулой можно пользоваться только на конечных интервалах времени (то есть независящих от ε).

ВАЖНОЕ ДОБАВЛЕНИЕ. Малое (на величину порядка Ge) изменение пределов интегрирования не изменит ответа, даваемого последней формулой!

(59) **Работа силы и изменение энергии**

Пусть дано уравнение Ньютона

$$m\dot x = F(\dot x, x, t).$$

Рассмотрим кинетическую энергию $T = \frac{m}{2}\dot x^2$ – это сложная функция времени вдоль решений. Имеем

$$T(t_1) - T(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dT}{dt}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\frac{m\dot x^2}{2}\,dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} m\ddot x\cdot\dot x\,dt = \int_{t_0}^{t_1} F(\dot x(t), x(t), t)\frac{dx(t)}{dt}\,dt = \int_{t_0}^{t_1} F\,dx(t).$$

Выражение $F\,dx$ называется *элементарной работой,* а весь результат гласит: изменение кинетической энергии равно работе силы вдоль решения.

Рассмотрим изменение полной энергии. Пусть сила имеет вид:

$$F(x) + \Phi(\dot x, x, t).$$

При $\Phi \equiv 0$ сохраняется $H = \frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x)$. При $\Phi \neq 0$ $H(\dot{x}(t), x(t))$ не постоянна. Изменение энергии как сложной функции времени таково:

$$H(t_1) - H(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi \, dx.$$

Это – работа дополнительной силы.

(60) **Диссипация энергии по причине вязкого трения**

Рассмотрим работу типа вязкого трения:

$$\Phi = -\dot{x}c(\dot{x}, x), \quad c > 0.$$

$$\Delta H = -\int_{t_0}^{t_1} \dot{x}^2 c(\dot{x}, x) \, dt < 0.$$

Полная энергия убывает, т.е. рассеивается, за исключением равновесий.

Нанесем на фазовую плоскость картину уровней полной энергии. Теперь фазовые кривые не идут по ним, а пересекают „сверху вниз", то есть от большего значения энергии к меньшей. Если считать силу вязкого трения не слишком значительной, то вблизи устойчивого равновесия фазовая кривая будет напоминать логарифмическую спираль. Кстати, мы знаем, что линейное уравнение вида $m\ddot{x} = -kx - c\dot{x}$ при небольших c имеет общее решение вида $x(t) = Ae^{-\chi t}\cos(\Omega t + \varphi)$, где χ, Ω выражаются через m, k, c, а A, φ – произвольные константы. С точностью до растяжения вдоль оси $\dot{x}$ это дает самую настоящую логарифмическую спираль на фазовой плоскости.

Влияние диссипации вблизи максимума потенциальной энергии проявляется совсем иначе. Чтобы понять, как именно, рассмотрим опять линейное уравнение вида $m\ddot{x} = +kx - c\dot{x}$ (т.е. вновь используем линеаризацию). Результат изображен на 12.1.

Интересно изобразить, как изменится фазовый портрет с максимумом и двумя минимумами при добавлении небольшой диссипации. На рис. 12.2 изображены сепаратрисы; все остальные фазовые кривые лежат между сепаратрисами и всегда ведут в одну из потенциальных ям.

(61) **Эволюция в потенциальной яме**

Рассмотрим малую диссипацию:

$$\Phi = -\varepsilon\dot{x}c(\dot{x}, x).$$

Считаем $\varepsilon \ll 1$, то есть $\varepsilon^2 = 0$ с принятой точностью вычислений. По теореме о гладкой зависимости от правых частей решение задачи Коши для уравнения Ньютона $m\ddot{x} = F + \varepsilon(\dots)$ представимо в виде

$$x_\varepsilon(t) = x_0(t) + \varepsilon\xi(t, \varepsilon),$$

поэтому с принятой точностью вычислений изменение полной энергии

$$\Delta H = -\varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \dot{x_\varepsilon}^2 c(\dot{x}_\varepsilon, \varepsilon) \, dt = -\varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \dot{x_0}^2 c(\dot{x}_0, x_0) \, dt, \tag{62}$$

где $x_0(t)$ – решение консервативной системы, которое принято называть *невозмущенным*. Оно подчиняется интегралу энергии (29). Примем, что функция $c(\dot{x}, x)$ четная по $\dot{x}$, так что $c(\dot{x}, x) = \sigma(\dot{x}^2, x)$. Отсюда

$$\frac{dH}{dt} = -\varepsilon\Sigma(h, x_0(t)), \tag{63}$$

где $\Sigma(h,x) = \dfrac{2h - V(x)}{m}\sigma\left(\dfrac{2h - V(x)}{m}, x\right)$. Функция $x_0(t)$ имеет период $\tau(h)$, вычислять который мы уже умеем. Как видим, в приближенной формуле (62) происходит *интегрирование периодической функции*, которое заслуживает отдельного общего взгляда. Для периодической функции $\lambda(t)$ с периодом τ введем ее *среднее значение* на периоде:

$$< \lambda >= \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \lambda(t)\,dt. \tag{64}$$

Тогда

$$\int_0^t \lambda(t)\,dt =< \lambda > t + \mu(t),$$

где $\mu(t)$ – тоже периодическая функция с тем же периодом.
Доказательство предлагается в качестве упражнения.

О полной энергии мы можем сделать (приближенный!) вывод, что

$$\Delta H = -const(h)\Delta t + \text{период.функ.}(\Delta t); \quad \Delta t = t_1 - t_0.$$

Формула верна для не слишком больших значений t, так как с ростом времени отклонение $\varepsilon\xi(t,\varepsilon)$ будет неуклонно возрастать и наконец достигнет значений, когда отбрасывать его станет просто глупо. Но мы зафиксируем интервал времени Δt, взяв просто период $\Delta t = \tau(h)$. Тогда

$$\frac{\Delta H}{\Delta t} = -\frac{\varepsilon}{\tau(h)}\int_0^{\tau(h)} \Sigma(h, x_0(t))\,dt = -\varepsilon\tilde{\Sigma}(h).$$

Здесь $\tilde{\Sigma}(h)$ – среднее значение функции $\Sigma(h, x_0(t))$, вычисленное вдоль периодического решения (с энергией h) консервативной системы $(\varepsilon = 0)$ за его, решения, период $\tau(h)$.

Напишем дифференциальное уравнение

$$\frac{dH}{dt} = -\varepsilon\tilde{\Sigma}(H). \tag{65}$$

Есть теорема (трудная), что это уравнение, полученное *осреднением* уравнения (63), хорошо описывает изменение H на временах порядка $\frac{\tau}{\varepsilon}$.

Научимся вычислять среднее значение для любой функции $g(x)$ вдоль колебания $x_0(t)$ с энергией h. Достаточно вспомнить, что

$$dt = dx/\sqrt{2(h - V(x))}$$

и применить замены переменной из (**??**):

$$< g >= \frac{1}{\tau(h)}\int_0^{\tau(h)} g(x_0(t))\,dt = \frac{2}{\tau(h)}\int_{x_1(h)}^{x_2(h)} \frac{g(x)\,dx}{\sqrt{2h - 2V(x)}} =$$

$$= \frac{1}{\tau(h)}\int_0^{2\pi} g(f(\sqrt{2h}\sin\xi))f'(\sqrt{2h}\sin\xi)\,d\xi.$$

Это знание мы применим вместе с разложениями (**??**) и им подобными:

$$\Sigma = \mathrm{c} + c_{10}x + c_{20}x^2 + c_{02}\dot{x}^2 + \ldots; \quad V = kx^2 + \ldots.$$

Ясно, что $\tilde{\Sigma}(H) = cH + o(H^2)$. Поэтому вблизи равновесия

$$\frac{dH}{dt} = -\varepsilon cH + o(H) \quad \Rightarrow \quad H = H_0 e^{-\varepsilon ct},$$

так что энергия экспоненциально убывает.

(66) **Одномерное отображение Пуанкаре сечением фазовой плоскости**

Рассмотрим векторное поле на плоскости и нарисуем на нем дугу кривой так, чтобы решения системы дифференциальных уравнений обязательно ее пересекали. Такая дуга называется сечением Пуанкаре. Предположим, что некоторое решение покидает нашу дугу и через некоторое время возвращается на нее.

Тем самым некоторой точке на кривой поставлена в соответствие некоторая новая.

Близкие решение будет обладать тем же свойством. Тем самым возникает отображение из части нарисованной вначале дуги на нее же.

Это отображение называется отображением Пуанкаре или отображением последования (как назвал его сам автор идеи).

Простейший интересный случай - когда отображение Пуанкаре имеет неподвижную точку. Тогда на фазовой плоскости мы имеем периодическое решение.

Может статься, что точки, близкие к неподвижной, при последовательных итерациях отображения Пуанкаре стремятся к неподвижной. Тогда на фазовой плоскости имеем устойчивый предельный цикл.

Рассмотрим простейший пример - редкий, когда отображение Пуанкаре вычисляется до явных формул.

Это гармонический осциллятор с небольшим вязким трением:

$$\ddot{x} + 2\chi\dot{x} + x = 0 \ ,$$

Начальное условие возьмем в виде $x(0) = a, \dot{x}(0) = 0.$ Тогда решение имеет вид

$$x = ae^{-\chi t}\left[\cos\Omega t + \frac{\chi}{\Omega}\sin\Omega t\right]. \tag{67}$$

Вычислив скорость и приравняв ее к нулю, видим, что

$$-a\frac{\Omega^2 + \chi^2}{\Omega}\sin\Omega t = 0 \tag{68}$$

В качестве сечения возьмем положительную полуось оси x. Тогда должно быть $\Omega t = 2\pi$ и потому начальная точка a отображается в

$$a' = e^{-\frac{\chi}{\Omega}2\pi}a \tag{69}$$

Величина

$$\delta = \frac{2\chi}{\Omega}\pi \tag{70}$$

логарифмическим декрементом затухания колебаний. Число e^{δ} показывает, насколько изменяется амплитуда за качание туда и обратно.

(71) **Автоколебания - предельные циклы по Пуанкаре**

Автоколебания по Андронову - это периодические решения НЕЛИНЕЙНОГО автономного уравнения Ньютона; мысль здесь в том, что существование названного решения обеспечивается таким притоком энергии, который «сидит» внутри системы, а не поступает извне. Разумеется, это условная трактовка — от нас зависит, какие объекты включать в систему, а какие нет. Тем не менее многие условности уже устоялись и воспринимаются как должное.

Стандартным примером здесь является уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} + 2\varepsilon(1 - 4x^2)\dot{x} + x = 0 \ , \tag{72}$$

Заменим это уравнение другим, но таким, чтобы среднее значение коэффициента при $\dot{x}$ за период невозмущенного движения была таким же, да еще так, чтобы проще было найти частное решение. Вот это уравнение:

(73) $$\ddot{x} + 2\varepsilon(1 - 2x^2 - 2\dot{x}^2)\dot{x} + x = 0 \ ,$$

Здесь легко угадать решение вида $x = a\cos t$, найти подходящее a, а в полярных координатах но плоскости убедиться, что получился предельный цикл.

Это не доказывает, но убеждает, что у уравнения Ван-дер-Поля происходит нечто подобное.

(74) **Простейшее двумерное отображение — сдвиг по времени**

Исходим из уравнения Ньютона

(75) $$m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x}).$$

Задав начальные условия

$$\text{при} \quad t = t_I \quad \text{справедливо} \quad x|_{t_I} = x_I, \ \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t_I} = \dot{x}_I,$$

получаем общее решение в виде $x(t, t_I, x_I, \dot{x}_I)$ и можем вычислить $\dot{x}(t, t_I, x_I, \dot{x}_I)$.

Вместо t напишем $t + T$, обозначим $y = \dot{x}$, опустим индекс I и посмотрим на формулы

(76) $$x' = x(t + T, t, x, y), \quad y' = v(t + T, t, x, y).$$

Они задают отображение П фазовой плоскости за время Т , начиная с t.

Последнее уточнение не нужно, если система автономна или если правые части периодичны с периодом как раз T.

Например, для линейных систем с матрицей A такое отображение задается матрицей e^{At}.

Опустим некоторые детали:

(77) $$x' = f(x, y), \ y' = g(x, y).$$

Чем эта запись отличается от произвольного отображения плоскости? Каждое ли отображение плоскости можно получить как отображение за время некотого уравнения Ньютона? или некоторой системы с двумя переменными? Это требует уточнений формулировок, ссылок на литературу и займет много места.

Мы же пока рассмотрим важнейший частный случай: Исходим из уравнения Ньютона

(78) $$m\ddot{x} = F(t, x).$$

ТЕОРЕМА. Тогда отображение Псохраняет площадь на плоскости (x, y).

Это следствие стандартной теоремы из теории дифференциальных уравнений.

(79) **Резонанс**

Это группа близких явлений, в которых мы сейчас разберемся.

(80) **Решение неоднородного уравнения**

Речь пойдет об уравнении $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \Phi(t)$.

Мы знаем, что дифференциальнок уравнение $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ называется *однородным*. Если $x^{(1)}(t)$ и $x^{(2)}(t)$ – два его решения, то для любых c_1 и c_2 тоже решением будет $c_1x^{(1)}(t) + c_2x^{(2)}(t)$ (при условии, что решения $x^{(1)}(t)$ и $x^{(2)}(t)$ линейно независимы)

Общее решение однородного уравнения будем обозначать $x_{\text{об.од.}}(t)$.

Вернемся к неоднородному уравнению. Пусть $x_A(t)$ – какое-то решение уравнения с правой частью $\Phi_A(t)$, а $x_B(t)$ – решение уравнения с правой частью $\Phi_B(t)$. Тогда их сумма – решение неоднородного уравнения с правой частью $\Phi_A(t) + \Phi_B(t)$.

Взяв $\Phi_A = \Phi$, $\Phi_B = 0$, получим, что сумма частного решения неоднородного уравнения и любого решения однородного – решение неоднородного уравнения.

Наконец,

$$x_{\text{об.неод.}}(t) = x_{\text{част.неод.}}(t) + x_{\text{об.од.}}(t).$$

Впредь правая часть считается периодической: $\Phi(t+\tau) = \Phi(t)$. Очень много полезного можно будет узнать, взяв самую простую периодическую силу: $\Phi(t) = \Phi\cos\nu t$ $(\tau = \frac{2\pi}{\nu})$.

(81) **Движение без трения**

ОСЦИЛЛЯТОР С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ:

$$m\ddot{x} = -kx + \Phi\cos\nu t.$$

Положим для простоты $m = k = \Phi = 1$. Получим уравнение

$$\ddot{x} + x = \cos\nu t.$$

Будем искать решение в виде $a\cos\nu t + b\sin\nu t$.

$$x_{\text{ч}}(t) = a\cos\nu t + b\sin\nu t.$$

$$\ddot{x}_{\text{ч}} = -\nu^2(a\cos\nu t + b\sin\nu t).$$

$$(-\nu^2 + 1)(a\cos\nu t + b\sin\nu t) = \cos\nu t.$$

Отсюда при $\nu \neq 1$ получаем $b = 0, a = \frac{1}{1-\nu^2}$:

$$x_{\text{ч}}(t) = \frac{1}{1-\nu^2}\cos\nu t.$$

Общее решение:

$$\frac{1}{1-\nu^2}\cos\nu t + c_1\cos t + c_2\sin t.$$

Найдем решение задачи Коши $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$. Оно имеет вид

$$x(t) = \frac{1}{1-\nu^2}(\cos\nu t - \cos t) = \frac{1}{\nu^2-1}2\sin\frac{1+\nu}{2}t\sin\frac{\nu-1}{2}t.$$

Общий результат: к гармоническим колебаниям $A\cos(\omega t + \varphi)$ прибавляются частные решения

(82) $$\frac{\Phi/m}{\omega^2 - m\nu^2}\cos\nu t \qquad (\nu \neq \omega),$$

(83) $$\frac{\Phi\omega t}{2k}\sin\omega t \qquad (\nu = \omega),$$

так что

А) при $\nu \approx \omega$ возникают биения — колебания с частотой $(\omega+\nu)/2$ и амплитудой, меняющейся с периодом

$$\tau = \frac{4\pi}{|\omega - \nu|},$$

максимум которой стремится к бесконечности при $\nu \to \omega$;

Б) если $\nu = \omega$, то получается раскачивание — колебания с амплитудой, растущей примерно линейно. Оба этих явления совокупно представляют собой так называемый

резонанс
(первая половина биений поначалу неотличима от раскачивания).

Совпадение частот само по себе тоже называется *резонансом*.

(84) **Анализ решения вблизи резонанса**

Вновь полагаем $k = m = \Phi = 1$, кроме того, $\nu = 1 + \varepsilon, \varepsilon \ll 1, \varepsilon \neq 0$. Для определенности займемся движением из состояния покоя ($x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 0$).

$$x_\varepsilon(t) = \frac{2}{(1+\varepsilon)^2 - 1}\sin(1+\frac{\varepsilon}{2})t\sin\frac{\varepsilon}{2}t = \frac{1}{\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}}\sin(1+\frac{\varepsilon}{2})t\sin\frac{\varepsilon}{2}t.$$

Зафиксируем произвольное t, разложим, что нужно, по формуле Тейлора и устремим ε к нулю.

$$x_0(t) = \frac{t}{2}\sin t.$$

Отсюда при $\nu = 1$ ($\varepsilon = 0$) частное решение $x_{\text{ч}}(t) = \frac{t}{2}\sin t$.

(85) **Движение с трением**

ОСЦИЛЛЯТОР С ВЯЗКИМ ТРЕНИЕМ И ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ:

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x} + \Phi(t).$$

Этой важной задаче уделяется много внимания в курсах теории колебаний (причем в качестве периодического слагаемого в правой части берется, конечно, не только простейший косинус).

Как обычно, считаем $m, c, k > 0$.

Рассмотрим однородное уравнение. Все его решения стремятся к нулю. Это вытекает из точного вида решения. Положим $\chi = \frac{c}{2m}$ (*коэффициент затухания*). Если

$$\lambda < \omega, \text{ то } x_{\text{об.од.}} = e^{-\chi t}(c_1\cos\sqrt{\omega^2 - k^2}t + c_2\sin\sqrt{\omega^2 - k^2}t;$$

$$\lambda = \omega, \text{ то } x_{\text{об.од.}} = (c_1 + c_2 t)e^{-\chi t};$$

$$\lambda > \omega, \text{ то } x_{\text{об.од.}} = c_1 e^{(-\chi - \sqrt{\omega^2 - k^2})t} + c_1 e^{(-\chi + \sqrt{\omega^2 - k^2})t}.$$

Простейшая, но выразительная ситуация: правая часть равна $\Phi\cos\nu t$.

Расмотрим неоднородное уравнение $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \Phi\cos\nu t$. Если у него есть периодическое частное решение $x_{\text{ч.п.}}(t)$, то

$$x_{\text{об.неод}}(t) = x_{\text{ч.п.}}(t) + x_{\text{об.од}}(t) \to x_{\text{ч.п.}}(t).$$

Ищем частное решение в виде $x(t) = A\cos(\nu t - \gamma)$. Это так называемое *вынужденное колебание*, которое происходит в системе с трением под действием периодической внешней силы и имеют ту же частоту (тот же период). Докажем это.

Заменим время $t := t - \text{const}$ так, чтобы справа было $\Phi(\cos\nu t + \gamma)$, а искать будем

$$x = A\cos\nu t.$$

Подставляем это в $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \Phi\cos(\nu t + \gamma)$. Положим параметры $m = k = \Phi = 1$.

$$-A\nu^2\cos\nu t - cA\nu\sin\nu t + A\cos\nu t = \cos(\nu t + \gamma)$$

$$A(1 - \nu^2)\cos\nu t - c\nu A\sin\nu t = \cos(\nu t + \gamma).$$

Решение получится $\Longleftrightarrow$

$$A(1-\nu^2)=\cos\gamma\ , \qquad c\nu A=\sin\gamma.$$

Здесь

$$A^2=\tfrac{1}{(1-\nu^2)^2+c^2\nu^2} \text{ — амплитуда}$$

$$\gamma=\operatorname{arctg}\tfrac{c\nu}{1-\nu^2} \text{ – фаза вынужденных колебаний.}$$

Общий результат: все движения стремятся к вынужденному колебанию

$$x=\frac{\Phi}{m\sqrt{(\omega^2-\nu^2)^2+4\chi^2\nu^2}}\cos\left(\nu t+\operatorname{arctg}\frac{2\chi\nu}{(\omega^2-\nu^2)}\right).$$

(86) **Амплитудно-частотные характеристики вынужденных колебаний**

Это графики.

Пусть $k,\ m,\ c$ фиксированы, а меняется только ν . График $A(\nu)$ очень интересен: при $c=0$ у него вериткальная асимптота в точке $\nu=\omega$. А при $c\neq 0$ - у него максимум не там, где можно ожидать, то есть не совпадает с $\nu=\omega$. Это явление называется амплитудным резонансом, максимум амплитуды в точке $\nu=\omega\sqrt{1-\frac{2\chi^2}{\omega^2}}$, и этот максимум стремится к бесконечности при $\chi\to 0$.

Зато график *амплитуды СКОРОСТИ* движения имеет максимум как раз при $\nu=\omega$.

(87) **Намек на ряды Фурье**

Вернемся к общему уравнению.

ВОПРОС: Что, если периодическая функция $\Phi(t)$ – не просто косинус? Например,

$$\Phi(t)=\sum\Phi_p\cos(p\nu t+\alpha_p)$$

($p\in I$, где I – некоторое множество).

Чтобы найти частное решение, достаточно найти частные решения в отдельности для каждого слагаемого. При отсутствии трения

$$x_{\text{ч}}(p)=\frac{\Phi/m}{\omega^2-p^2\nu^2}\cos(p\nu t+\alpha_p).$$

Потом эти частные решения надо сложить.

Предельные движения — вынужденные колебания — при наличии трения также складываются (принцип суперпозиции).

У нас $\nu=\frac{2\pi}{p}\tau$ – единственный параметр, на который накладывается несколько (сколько значений p) ограничений. Для каждого из слагаемых $\Phi_p\cos(p\nu t+\alpha_p)$ в правой части опасными (в смысле резкого роста амплитуды) для частных решений являются частоты, для которых $\omega\approx p\nu$.

(88) **Идея возмущения**

Пусть имеем уравнение вида

$$m\ddot{x}=F_1(x)+\varepsilon F_2(\dot{x},x,t,\varepsilon),$$

содержащее параметр $\varepsilon\ll 1$. Теперь решения $x(t,\varepsilon)$ зависят от параметра, причем зависимость эта гладкая. Начальные условия $x(t_0)=x_0,\dot{x}(t_0)=\dot{x}_0$. Разложим $x(t,\varepsilon)$ (при произвольном t) в ряд Тейлора

(89) $$x(t,\varepsilon)=x(t)+\varepsilon\xi(t)+\varepsilon^2\eta(t,\varepsilon),x(t,0)=0.$$

Здесь $x(t)$ - *невозмущенное движение,* т.е. решение уравнения $m\ddot{x}=F_1(x)$.

Подставим 89 в полное уравнение движения:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}(t,\varepsilon) = F_1(x(t,\varepsilon)) + \varepsilon F_2(\frac{dx(t,\varepsilon)}{dt}, x(t,\varepsilon), t, \varepsilon)$$

Заложим правые и левые часть в ряды по ε при фиксированном t.

Приравняв свободные члены, видим, что $m\ddot{x}(t) = F_1(x(t))$, как и должно быть.
Приравняв члены первой степени по ε , получим:

$$m\ddot{\xi}(t) = \frac{dF_1}{dx}|_{x(t)}\xi(t) + F_2(\dot{x}(t), x(t), t, 0),$$

Вывод: при возмущении консервативных систем всегда возникают уравнения вида

$$m\ddot{\xi} = -K(t)\xi + \chi(t),$$

где K, χ – легко вычислимые функции.

Если исходная сила имеет вид $F_1(\dot{x}(t), x(t))$, то аналогично получим

$$m\ddot{\xi} = -C(t)\dot{\xi} - K(t)\xi + \chi(t),$$

Важный частный случай. Если $F_1 = const$, то

$$m\ddot{\xi}(t) = F_2(\dot{x}(t), x(t), t, 0) = \chi(t)$$

Тогда $\xi(t)$ находится двукратным интегрированием по t с учетом того, что $\xi(0) = 0, \dot{\xi}(0) = 0$.

(90) **Параметрический резонанс (намеки на теорию)**

Стандартным примером здесь является уравнение вида

(91) $$\ddot{x} + (1 + \varepsilon\varphi(\nu t))x = 0 \ , \quad \nu t \mod \pi$$

Это уравнение колебаний, где частота не сильно, все же периодически меняется. Наглядный образ - маятник переменной длины.

Решить это уравнение невозможно, даже если на роль φ взять косинус.

Чтобы понять, что может происходить, приходится брать кусочно-постоянную функцию φ. Тогда вычисления доступны и удается обнаружить удивляющее: произведение двух матриц с собственными значениями, как у обычных поворотов, имеет собственные значения, как у гиперболического поворота.

И происходит это при таких значениях ν, ε, когда ν близко к $2\omega/k$.

Теперь перейдем к подробностям.

Рассмотрим уравнение вида

$$m\ddot{x} + K\left(t \bmod \tfrac{2\pi}{\nu}\right)x = \chi(t).$$

Если $x(t)$ — решение, то $x(t + \frac{2\pi}{\nu})$ тоже решение.

Одновременно рассматриваем равносильную систему дифференциальны уравнений первого порядка ($y \equiv \dot{x}$)

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = M(t)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \ , \quad \text{где} \ \ M(t) = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -K(t) & 0\end{pmatrix}.$$

Как известно, у линейных однородных систем свойства устойчивости и ограниченности решений совпадают. Ограниченностью мы и займемся.

Пусть функция K содержит некоторый параметр m; более конкретно, представим себе $K(t,\mu)$ в удобном для дальнейшего виде:

$$\ddot{x} + (1 + \mu f(t,\mu))x = 0.$$

Если $\mu = 0$, то $x = x_0 \cos t + \dot{x}_0 \sin t$, $\dot{x} = -x_0 \sin t + \dot{x}_0 \cos t$ (ограниченные колебания).

Перспектива: можно f (и при этом ν) выбрать так, что и при μ сколь угодно малом ($\mu \to 0$) неограниченность будет иметь место. Это и есть параметрический резонанс (точнее, его самая легко доказуемая трактовка).

Рассмотрим общее решение системы: $x(t, x_0, y_0)$, $y(t, x_0, y_0)$ (считаем, что при $t = 0$ получаются x_0 и y_0). Тогда общее решение вследствие линейности имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S(t) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \ , \ S(0) = E.$$

Определитель Вронского матрицы Коши $S(t)$, то есть функция $w(t) = \det S(t)$, удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt} w = \operatorname{tr} M(t) w,$$

а поскольку сейчас $\operatorname{tr} M(t) \equiv 0$ и $w(0) = \det E = 1$, имеем $w(t) = \det S(t) \equiv 1$.

Определение. Отображением за период (вообще при периодической матрице $M(t)$) называется отображение

$$P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \ \mapsto \ P_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = S(\tau) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \ .$$

Имеем последовательность

$$\begin{aligned} x_1 &= x\left(\tfrac{2\pi}{\nu}, x_0, y_0\right) & \qquad x_k &= x\left(k\tfrac{2\pi}{\nu}, x_0, y_0\right) \\ y_1 &= y\left(\tfrac{2\pi}{\nu}, x_0, y_0\right), & \qquad y_k &= y\left(k\tfrac{2\pi}{\nu}, x_0, y_0\right). \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = S^k(\tau) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Напоминаем: у нас $\det S(\tau) = 1$.

Примеры постоянных матриц S с $\det = 1$

(а) $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ — поворот.

Здесь $f = x^2 + y^2$ — «первый интеграл», т. е. функция, инвариантная при отображении: $f(P_1) = f(P_0)$.

(б) $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ — гиперболический поворот.

Здесь«первый интеграл» — $f = xy$

ТЕОРЕМА. Если $\det S = 1$, то преобразование $P_0 \to P_1$ в подходящем базисе является либо обычным поворотом, либо гиперболическим.

Доказательство. Напишем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ \mathrm{c} & d - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \underbrace{(a + d)}_{\operatorname{tr} S} \lambda + 1 = 0.$$

Дискриминант равен $D = \operatorname{tr}^2 - 4$.

При $|\operatorname{tr}| > 2$ собственные значения λ_1, λ_2 действительны и $\lambda_1 \lambda_2 = 1$, т. е. имеем λ и $\frac{1}{\lambda}$.

Если $|\operatorname{tr}| < 2$, то собственные значения — два комплексно-сопряжённых числа, $\lambda_1 \lambda_2 = 1$, $\lambda_{1,2} = \cos\alpha \pm i \sin\alpha$.

Овеществление. Допустим, что $\boldsymbol{q} + i\boldsymbol{p}$ — собственный вектор с собственным значением $\lambda_1 = \alpha + i\beta$:

$$S(\boldsymbol{q} + i\boldsymbol{p}) = (\alpha + i\beta)(\boldsymbol{q} + i\boldsymbol{p}).$$

Выделяем вещественную и мнимую части:

$$S\boldsymbol{q} = \alpha\boldsymbol{q} - \beta\boldsymbol{p}\ , \quad S\boldsymbol{p} = \beta\boldsymbol{q} + \alpha\boldsymbol{p}.$$

В репере $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ отображение имеет матрицу $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

Далее ясно.

□

Для решения вопроса об ограниченности решений достаточно исследовать след матрицы $S = S(\tau)$ (если $|\operatorname{tr}| > 2$, то решения неограниченны, иначе — ограничены).

Для неграниченности последовательности $P_k = S^k P_0$ нам нужно $|\operatorname{tr}| > 2$.

Вообще говоря, матрица $S(t)$ не вычисляется «в формулах» даже в таком простом, казалось бы, случае, как $K(t) = 1 + \mu\cos\nu t$. Поэтому возьмем $K(t)$ кусочно-постоянной:

$$K(t) = \omega_1, 0 \leqslant t < T_1, \quad K(t) = \omega_2, T_1 \leqslant t < T_1 + T_2 = \tau$$

на начальном периоде и аналогично потом.

Обще решение системы

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \frac{1}{\omega}\sin\omega t \\ -\,\omega\sin\omega t & \cos\omega T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому отображение за период для кусочно-линейной $K(t)$ будет задаваться матрицей вида

$$S(\tau = T_1 + T_2) = \begin{pmatrix} \cos\omega_2 T_2 & \frac{1}{\omega_2}\sin\omega_2 T_2 \\ -\,\omega_2\sin\omega_2 T_2 & \cos\omega_2 T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\omega_1 T_1 & \frac{1}{\omega_1}\sin\omega_1 T_1 \\ -\,\omega_1\sin\omega_1 T_1 & \cos\omega_1 T_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\phi_1\cos\phi_2 - \frac{\omega_1}{\omega_2}\sin\phi_1\sin\phi_2 & ??? \\ ??? & \cos\phi_1\cos\phi_2 - \frac{\omega_2}{\omega_1}\sin\phi_1\sin\phi_2 \end{pmatrix}.$$

(здесь $\phi_{1,2} = \omega_{1,2}T_{1,2}$). Вычислим след:

$$\operatorname{tr} = 2\cos\phi_1\cos\phi_2 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) =$$

$$= 2\cos(\phi_1 + \phi_2) - \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} - 2\right)\sin\phi_1\sin\phi_2.$$

Осталось подобрать $\omega_{1,2}$, $T_{1,2}$ так, чтобы было $|\operatorname{tr}| > 2$.

Принимая $\phi_1 + \phi_2 = 2\pi$, нужно добиться, чтобы $\sin\phi_1\sin\phi_2$ было отрицательным. Положим

$$\omega_1 = 1 + \mu, \quad \omega_2 = 1 - \mu, \quad T_1 = T_2 = \pi.$$

Тогда

$$\sin((1+\mu)\pi)\sin((1-\mu)\pi) = \sin(\mu\pi)\sin(-\mu\pi) = -\sin^2(\mu\pi) < 0.$$

По непрерывности выбранные параметры можно чуть-чуть «пошевелить» с тем же результатом.

Аналогичный результат верен и для $K(t) = 1 + \mu\cos\nu t$ при νоколо 1.

На самом деле это далеко не единственный возможный выбор ν, но без обоснований говорить больше не будем.

2. Грубость и бифуркации

Общий ход мысли здесь такой: имеется объект, свойства которого зависят от нескольких параметров. Параметры медленно меняются. Свойство грубости состоит в том, что в некоторой области параметров никаких изменений качественных свойств объекта не происходит, он остается узнаваемым, его детали сохраняют прежние наименования, слегка меняясь. При выходе на границу области проиходит такое, что после пересечения ее объект станет явно другим: изменение, которое произошло, и называется бифуркацией - ветвлением. Например, если наливать воду в стакан на столе, то в какой-то момент возникнет лужа рядом с ним. Ососбенно важно то, что сама бифуркация, в принципе — явление грубое: если слегка изменить исследуемый объект (стакан заменить на чашку), то бифуркация сохранится все равно.

Простейший, но содержательный пример. Дано уравнение

$$F_\varepsilon(x) = F_0(x) + \varepsilon F_1(x) + o(\varepsilon^2) = 0 \text{ (опять } \varepsilon \ll 1). \tag{92}$$

Пусть $\hat{x}$ – решение уравнения при $\varepsilon = 0$. Что произойдет при $\varepsilon \neq 0$? Будем искать равновесие в виде $\hat{x_\varepsilon} = \hat{x} + \varepsilon \hat{x_1} + \ldots$. найти лишь $\hat{x_1}$. Подставляя $\hat{x_\varepsilon}$ в уравнение $F_0(x) + \varepsilon F_1(x) + \ldots = 0$, получим

$$F_0(\hat{x} + \varepsilon \hat{x_1}) + \varepsilon F_1(\hat{x} + \varepsilon \hat{x_1}) + \ldots = 0.$$

После разложения в ряд по ε, получим

$$F_0(\hat{x}) + \varepsilon[F_0'(\hat{x})\hat{x_1} + F_1(\hat{x})] + o(\varepsilon^2) = 0. \tag{93}$$

Но $F_0(\hat{x}) = 0$, так как $\hat{x}$ — корень при $\varepsilon = 0$. следовательно,

$$\hat{x_1} = -\frac{F_1(\hat{x})}{F_0'(\hat{x})} \tag{94}$$

Как видим, при $F_0'(\hat{x}) \neq 0$ корень уравнения сохраняется, но несколько смещается — более строго то же самое выводится из теоремы о неявной функции.

Этот факт не зависит от вида F_1 — вот это как раз и есть грубая ситуация (термин предложен Андроновым для фазовых портретов).

Посмотрим на случай $F_0'(\hat{x}) = 0$. Для ясности возьмем пример $x^2 = \varepsilon$и сразу уловим, что происходит. Похожее будет, если F_0 имеет НЕВЫРОЖДЕННЫЙ ($F_0'' \neq 0$) минимум или максимум - вот и грубость бифуркации налицо.

Вообще, грубость или устойчивость ситуации — это когда НЕЧТО ДОЛЖНОЕ не равно нулю. Надо лишь правильно установить, что именно ДОЛЖНОЕ (скорее всего - некоторый определитель).

Дальнейшее ведет нас в следующий параграф.

(95) **Бифуркации равновесий и катастрофы**

Если рисовать фазовые портреты консервативных систем, зависящих от параметров, но неизбежно будешь проигрывать несколько стандартных пассажей. Посему это так и в каком точном смысле — объяснить трудно, а вот сыграть их — легко.

Все определяется особыми (критическими) точками потенциала.

Будем рисовать графики потенциала, фазовые портреты, диаграммы Пуанкаре (критические точки в зависимости от параметров) и бибуркационные диаграммы (критические значения в зависимости от параметров).

ОСОБЕННОСТЬ A_1 (складка). Это когда ничего не происходит.

$$V = Frac12x^2 \quad \text{или} \quad V = -Frac12x^2 \tag{96}$$

ОСОБЕННОСТЬ A_2 (сборка Уитни). На «ровном месте» рождаются две критические точки.

(97) $$V = Frac16x^3 - ax$$

ОСОБЕННОСТЬ A_3 (ласточкин хвост). две критические точки.

(98) $$V = Frac124x^4 - Fraca2x^2 - bx$$

Тут масса подслучаев, среди которых выделяется $b = 0$, когда мы имеем дело с четной функцией.

Те картинки, которые мы здест увидели, обязательно (может быть, в деформированном виде) встретятся при построении буфуркационных диаграмм.

(99) **Грубость и негрубость фазовых портретов**

Сначала надо исследовать на УСЛОВНУЮ грубость линейные (автономные) задачи — условную в том смысле, что меняются только параметры линейной системы.

Это нетрудно.

После этого остается поверить в трудную теорему о том, что условно грубые линейные задачи — грубые вообще в некоторой окрестности состояния равновесия.

Еще труднее теорема Пуакаре-Андронова о грубых системах на плоскости. Такие системы с необходимостью должны иметь грубые состояния покоя и грубые (невырожденные) предельные циклы. Есть еще трудность с сепаратрисами, идущими из седла в седло — такого не должно быть.

(100) **Нелинейный резонанс и бифуркации вынужденных колебаний**

Стандартным примером здесь является уравнение Дуффинга

(101) $$\ddot{x} + \mathrm{c}\dot{x} + x = \Phi\cos\nu t + \varepsilon x^3 \ ,$$

в котором размерно независимые параметры уже равны единице.

Нелинейность уравнения обусловлена появлением слагаемого εx^3. Степень взята третья, а не вторая (как можно было бы ожидать из «очевидных соображений», так как сила, зависящая от положения, при этом нечетная, что весьма естественно.

Заменим это уравнение другим, но таким, чтобы в выражении нелинейной силы

$$F = \left(-1 + \varepsilon x^2\right) x$$

среднее значение коэффициента при x было тем же (за период невозмущенного движения), а еще таким, чтобы проще было найти частное решение. Вот это уравнение:

(102) $$\ddot{x} + \mathrm{c}\dot{x} + x = \Phi\cos\nu t + \frac{\varepsilon}{2}x(x^2 + \dot{x}^2) \ ,$$

Здесь легко угадать решение вида $x = a\cos\nu t + \varphi$, поискать подходящие a и φ, и убедиться, что при некоторых сочетаниях параметров таких a может быть даже три.

Здесь самое время порисовать так называемые амплитудно-частотные характеристики, и сравнить их при $\varepsilon = 0$ и при $\varepsilon \neq 0$.

(103) **Бифуркация рождения цикла**

Ее можно проследить, взяв уравнение

(104) $$\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} - 4x^2\dot{x} + x = 0 \ ,$$

Теперь есть диссипация, очень незаметная при малых x, и линейная по скорости сила, коэффициенту при которой теперь позволено менять знак.

Заменим это уравнение другим, но таким, чтобы среднее значение коэффициента при $\dot{x}$ за период невозмущенного движения была таким же, да еще так, чтобы проще было найти частное решение. Вот это уравнение:

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} - 2(x^2 + \dot{x}^2)\dot{x} + x = 0 \ , \tag{105}$$

Здесь легко угадать решение вида $x = a\cos t$, найти подходящее $a = \sqrt{\varepsilon}$. Это и будет периодическое решение, рождающееся при переходе εчерез нуль слева направо.

Это - типичное явление, но не гарантированное. Желательны условия на члены высших порядков при $\varepsilon = 0$.

Чтобы это понять, возьмем уравнение

$$\ddot{x} = (1 + x^2)(-2\varepsilon\dot{x} - x) + \frac{2x\dot{x}}{1 + x^2} \ , \tag{106}$$

Оно нелинейно. Но лишь заменой времени $dt := (1 + x^2)dt$ отличается от обычного линейного. Поэтому никаких циклов у него при переходе c через нуль не возникнет.

3.. Уравнения движения с характеристическими функциями

(107) **Система уравнений Лагранжа**

второго порядка в переменных $q_1, \ldots, q_n$ имеет вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \ , \qquad i = 1, \ldots, n \tag{108}$$

или короче

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathrm{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathrm{q}} = 0 \ , \qquad \mathrm{q} = (q_1, \ldots, q_n),$$

где $L(\dot{\mathrm{q}}, \mathrm{q}, t) = L(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, q_1, \ldots, q_n, t)$ - заданная функция, именуемая *лагранжианом* или *функцией Лагранжа*. Запись 108 указывает последовательность операций для выписывания системы.

(109) **Система уравнений Гамильтона**

первого порядка в переменных $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ имеет вид

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \ \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad , \quad i = 1, \ldots, n \tag{110}$$

или короче

$$\dot{\mathrm{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathrm{q}}, \ \dot{\mathrm{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathrm{p}}$$

или еще короче

$$\dot{\mathrm{z}} = \mathbf{I}\frac{\partial H}{\partial \mathrm{z}}, \qquad \mathrm{z} = (\mathrm{p}, \mathrm{q}), \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}. \tag{111}$$

где $H(\mathrm{z}, t) = H(\mathrm{p}, \mathrm{q}, t) = H(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, t$ – заданная функция, именуемая *гамильтонианом* или *функцией Гамильтона*.

(112) **Обозначения.**

Мы считаем, что $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ всегда означает вектор-столбец, если только одна из переменных x и y – векторная. В противном случае $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ – матрица, причем по столбцам идут компоненты того вектора, который читается первым, то есть переменные y.

(113) **Равносильность систем Лагранжа и Гамильтона.**

На лагранжиан полагается налагать *условие невырожденности*

$$\det\left\|\frac{d^2L}{d\dot{q}_i{}^2}\dot{q}_j\right\| \neq 0\ , \tag{114}$$

чтобы систему (108) можно было разрешить относительно ускорений $\ddot{q}_k$. При этом же условии система соотношений (это выражение *импульсов* p_i через $(\dot{\mathrm{q}},\mathrm{q},t)$ или *преобразование Лежандра*)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i\ , \qquad i=1,\ldots,n \tag{115}$$

разрешима относительно скоростей ($\dot{\mathrm{q}} = \dot{\mathrm{q}}(\mathrm{p},\mathrm{q},t)$). Составим функцию

$$H = \left[\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - L\right]\Bigg|_{\dot{\mathrm{q}}=\dot{\mathrm{q}}(\mathrm{p},\mathrm{q},t)} \tag{116}$$

Тогда системы (108) и (110) равносильны, и их решения связаны как раз посредством преобразования Лежандра. При этом вторая половина уравнений Гамильтона представляет собой упомянутое обращение зависимостей (115).

(117) **Задача Коши и общее решение**

для систем уравнений Лагранжа и Гамильтона $\left[\begin{array}{l}(108)\\(110)\end{array}\right.$ понимаются, как обычно.

Если функция $\left[\begin{array}{l}L\\H\end{array}\right.$ достаточно гладкая, то справедливы теоремы о существовании и единственности решений.

Когда речь заходит об автономных системах, то есть когда $\left[\begin{array}{l}\dfrac{\partial L}{\partial t}\equiv 0\\ \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial t}\equiv 0\end{array}\right.$ начальным моментом времени принято считать $t_0 = 0$. При этом имеется

$$\left[\begin{array}{l} H(\dot{\mathrm{q}},\mathrm{q}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = h = \mathrm{const}\\ H(\mathrm{p},\mathrm{q}) = h = \mathrm{const}\end{array}\right. . \tag{118}$$

В случае, когда *число степеней свободы* $n=1$, этот интеграл позволяет решить уравнения движения.

Мы различаем *положение* q и *состояние* $\left[\begin{array}{l}(\dot{\mathrm{q}},\mathrm{q})\\(\mathrm{p},\mathrm{q})\end{array}\right.$.

(119) **Комментарий.**

Функции Лагранжа и Гамильтона являются *характеристическими*, во-первых, в том смысле, что системы дифференциальных уравнений получаются с помощью стандартного набора операций над ними. А во-вторых, потому, что каждому типу системы отвечает своя *группа преобразований, сохраняющая форму* системы: вместо того, чтобы после замены переменных преобразовывать сами уравнения, достаточно

(А) преобразовать только характеристическую функцию и
(Б) применить стандартный набор операций в новых переменных.

Для уравнений Лагранжа речь идет о группе замен координат, т.е. любых подстановках вида

$$q_i = q_i(\xi_1, \ldots, \xi_n, t) \ , \qquad i = 1, \ldots, n \ , \tag{120}$$

при условии, что якобиан не равен нулю. Дифференцируя (120), получаем

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial \xi_j} \dot{\xi}_j + \frac{\partial q_i}{\partial t} \ , \tag{121}$$

подставляем (120),(121) в $L(\dot{\mathrm{q}}, \mathrm{q}, t)$ и получаем новый лагранжиан $\tilde{L}(\dot{\xi}, \xi, t)$.

Для уравнений Гамильтона речь идет о группе *канонических подстановках*, т.е. любых заменах переменных вида

$$p_i = p_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n) \ , \quad q_i = q_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n) \ , \tag{122}$$

не зависящих явно от времени, при условии, что матрица Якоби $\Delta = \dfrac{\partial(\mathrm{p}, \mathrm{q})}{\partial(\alpha, \beta)}$ является *симплектической*, то есть

$$\Delta \mathrm{I} \Delta^* = \mathbf{I} \ . \tag{123}$$

Подставляем (122) в $H(\mathrm{p}, \mathrm{q}, t)$ и получаем новый гамильтониан $\tilde{H}(\alpha, \beta, t)$.

Подстановки, зависящие от времени, называются каноническими, если условие (123) выполняется при каждом t. Однако для них гамильтониан не преобразуется простой подстановкой, как лагранжиан, а изменяется по более сложному правилу (об этом позднее).

ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННЫХ НУЖНЫ БУДУТ ДЛЯ ТОГО,
ЧТОБЫ УПРОЩАТЬ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ
И, СЛЕДОВАТЕЛЬНО, – УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ.

4.. Два равносильных способа задавать геометрические (голономные) связи. Обобщенные (лагранжевы) координаты системы.

<u>Соглашение</u>: Все равно, как задавать поверхности — системой уравнений или параметрически (топологические оговорки игнорируем). Это практически *взаимозаменимо*. Способ выбираем смотря по тому, что удобнее сложившихся обстоятельствах. Значок "$\leftrightarrow$" означает такую взаимозаменимость.

Мы говорим, что переменные z связаны, когда $\Phi(z, ...) = 0 \leftrightarrow z = \varphi(\zeta, ...)$ в условиях применимости теоремы о неявной функции: $\dim z = dim\zeta + dim\Phi$, $\mathrm{rang}\, \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} - max \leftrightarrow \mathrm{rang}\, \dfrac{\partial \varphi}{\partial \zeta} - max$.

Геометрические (голономные) связи — это ограничения на координаты.

Выше мы свели динамику системы в динамике одной точки в многомерном пространстве (для простоты его размерность пусть будет K). Будем работать в соответствующих переменных. Возьмем уравнения связи $f_a(x, t) = 0$. По нашему соглашению, это взаимозаменимо с $x_k = x_k^*(q_1, q_2, ..., q_n, t)$, короче,

$$f_a(x, t) = 0 \quad \leftrightarrow \quad x_k = x_k^*(q_1, q_2, ..., q_n, t), \tag{124}$$

Здесь $a = 1, 2, ..., A$, K — число переменных "x"; уравнения $f_a(x, t) = 0$ задают *многообразие положений* число $n = K - A$ — размерность этого многообразия, $q_1, q_2, .., q_n$ — лагранжевы (обобщенные) координаты, это координаты на многооразии положений.

Если других связей нет, то n называется числом степеней свободы.

В исходных переменных динамики точек

$$\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu(q_1, \ldots, q_n, t).$$

Поскольку $x = x(q,t)$, диференцирования и подстановки дают

$$\varphi(x,t) \mapsto \varphi^*(q,t), \quad \Phi(\dot{x},x,t) \mapsto \Phi^*(\dot{q},q,t), \quad \Phi(\ddot{x},\dot{x},x,t) \mapsto \Phi^*(\ddot{q},\dot{q},q,t)\ .$$

Как следствие, задать геометрические связи — значит задать лагранжевы координаты и впоследствии определить скорости и ускорения точек системы через обобщенные скорости и обобщенные ускорения.

5.. Общее понятие связи в аналитической механике, равносильные способы задания связей; классификация связей (связи геометрические и кинематические, стационарные и нестационарные, голономные и неголономные).

Рассмотрим геометрические и кинематические связи. Геометрические пусть уже наложены.

Можно ввести понятие *производной связи.* Продифференцируем $f_a(x,t) = 0$ и получим дифференциальную связь, накладывающую ограничение на скорость:

$$\sum \frac{\partial f_a}{\partial x_k}\dot{x}_k + \frac{\partial f_a}{\partial t} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \dot{x}_k = \sum \frac{\partial x_k}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial x_k}{\partial t} \tag{125}$$

Введем дополнительные, КИНЕМАТИЧЕСКИЕ связи

$$g_b(\dot{x},x,t) = 0, \quad b = 1,...,B \tag{126}$$

Они должны быть функционально независимы по $\dot{x}$ вместе с (125).

В системе $\begin{cases} (125) \\ (126) \end{cases}$. Подставим в (126) $\dot{x}$ из (125), получим $g_b^*(\dot{q},q,t) = 0$. Это взаимозаменимо с

$$\dot{q}_i = \psi_i(\omega_1,...,\omega_m,q,t), \quad i = 1,...,n,$$

где $m = n - B = K - A - B$, — *число степеней свободы* теперь уже в общем случае.

Величины $\omega_1,...,\omega_m$ называются *псевдоскоростями.*

6.. Псевдоскорости.

Здесь надо дать определение из предыдущего и привести примеры: сани Чаплыгина и тело с неподвижной точкой.

Далее отметить тонкость в понимании полной производной: пусть имеем $\Phi(\omega,q,t)$ и ω и q зависят от t. Тогда

$$\frac{d\Phi}{dt} = \sum \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_\lambda}\dot{\omega}_\lambda + \sum \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \sum \frac{\partial \Phi}{\partial \omega_\lambda}\dot{\omega}_\lambda + \sum \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}\psi_i(\omega,q,t) + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Отсюда вытекает, что при подстановке псевдоскоростей

$$\Phi(\dot{q},q,t) \quad \mapsto \quad \Phi^*(\omega,q,t), \quad \Phi(\ddot{q},\dot{q},q,t) \quad \mapsto \quad \Phi^*(\dot{\omega},\omega,q,t).$$

Отметим, что выражения $\ddot{x}_k^*(\dot{\omega},\omega,q,t)$ линейны по $\dot{\omega}$.

Величины $\dot{\omega}_1,...,\dot{\omega}_m$ называются *псевдоускорениями.*

7.. Произвол при выборе реакций связей. Аксиома (модель) идеальных связей. Принцип наименьшего принуждения Гаусса.

Продифференцировав дифференциальные связи по времени, получим выражения для ограничений накладываемых связями на ускорение

$$\sum \frac{\partial f_a}{\partial x_k}\ddot{x}_k + \sum(\frac{d}{dt}\frac{\partial f_a}{\partial x_k})\dot{x}_k + \frac{d}{dt}\frac{\partial f_a}{\partial t} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \ddot{x}_k = \sum \frac{\partial x_k}{\partial q_i}\ddot{q}_i + \sum(\frac{d}{dt}\frac{\partial x_k}{\partial q_i})\dot{q}_i + \frac{d}{dt}\frac{\partial x_k}{\partial t} \tag{127}$$

Продифференцируем (126) по времени:

$$\sum \frac{\partial g_b}{\partial \dot{x}_k}\ddot{x}_k + \sum(\frac{d}{dt}\frac{\partial g_b}{\partial x_k})\dot{x}_k + \frac{\partial g_b}{\partial t} = 0. \tag{128}$$

Рассмотрим систему $\left\{ \begin{array}{l} (178) \\ (128) \end{array} \right.$. Аналогично тому, как получили $\dot{q}_i = \psi_i(\omega_1, ..., \omega_m, q, t)$, увидим:

$$\ddot{q}_i = \sum_{\lambda=1}^{m} \frac{\partial \psi_i}{\partial \omega \lambda}\dot{\omega}_\lambda + [...]$$

Здесь $[...]$ — функция от (ω, q, t), уточнение которой нас не интересует.

Геометрический смысл системы $\left\{ \begin{array}{l} (178) \\ (128) \end{array} \right.$ таков: поскольку (178), (128) линейны по ускорениям, получаем плоскость *мыслимых ускорений* (термин Гаусса) при каждом фиксированном состоянии $(\dot{x}, x, t)$. Эта плоскость имеет размерность m. *Освобожденное ускорение* (по Гауссу) получаем, когда нет связей — оно определяется только силами: $a_{\text{осв}}[\equiv \ddot{x}] = \mathcal{F}/M$ при каждом $\dot{x}, x, t$.

Если связи наложены, то в исходном уравнении Ньютона (**??**) появляется дополнительное слагаемое:

$$M\ddot{x} = \mathcal{F}(\dot{x}, x, t) + \mathcal{R}\ ; \tag{129}$$

Оно называется совокупной реакцией связей. Самого по себе введения такого слагаемого мало; про движения $x(t)$ или про силу R надо сказать что-либо обязывающее. Иначе удачным выбором $\mathcal{R}$ можно получить любое движение, которое только может придти в голову.

План действий теоретика таков. Уже имеем

$$\frac{dq_i}{dt} = \psi_i(\omega, q, t)$$

Это часть системы дифференциальных уравнений. Надо дописать эту систему:

$$\frac{d\omega_\lambda}{dt} = \Psi_\lambda(\omega, q, t). \tag{130}$$

Нужна процедура, теоретически ведущая к выражению Ψ при каждом $(\dot{\omega}, q, t)$,, исходя из заданных $\mathcal{F}, f_a, g_b$. То же самое другими словами: при каждом фиксированном состоянии, удовлетворяющем заданным связям, при заданных силах надо ДАТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЕ единственного набора $\dot{\omega}_1, ..., \dot{\omega}_m$, в конечном счете, указать <u>истинное ускорение</u> (по Гауссу).

Вводится *принуждение по Гауссу*

$$G(\ddot{x}, \dot{x}, x, t) = \frac{M}{2}\sum(\ddot{x}_l - \frac{\mathcal{F}_l}{M})^2.$$

В исходных переменных динамики системы $G = \frac{1}{2}\sum(\ddot{\boldsymbol{r}}_\nu - \boldsymbol{F}_\nu/m_\nu)^2$.

Истинным ускорением является то из мыслимых, которое доставляет минимум принуждению.

Или, что равносильно,

истинное ускорение является основанием перпендикуляра, опущенного из освобожденного на плоскость мыслимых ускорений, так как принуждение есть квадрат расстояния $\boldsymbol{a}_{\text{осв}}$ до этой плоскости. Или, что равносильно,

истинное ускорение обеспечивает минимум некоторой характеристике совокупной реакции, а именно величине $\frac{1}{2M}\mathcal{R}^2 \equiv \frac{1}{2}\sum \frac{\boldsymbol{R}_\nu^2}{m_\nu}$.

8.. Уравнения Аппеля и их общий вид.

Имея координаты и псевдоскорости, можно вычислить $G^*(\dot\omega, \omega, q, t)$. Из вышесказанного ясно, что

$$\frac{\partial G^*}{\partial \dot\omega_\mu} = 0, \quad \mu = 1, ..., m \ . \tag{131}$$

Это и есть уравнения Аппеля. Подчеркнем, что в тем самым **предъявлена самая форма общая уравнений движения механических систем в обобщенных координатах и псевдоскоростях**. Вид этих уравнений можно уточнить, зная, что принуждение — квадратично-линейное выражение ускорений:

$$G = \frac{1}{2}\sum G_{\lambda\mu}(\omega, q, t)\dot\omega_\lambda\dot\omega_\mu + \sum G_\lambda(\omega, q, t)\dot\omega_\mu + G_o(\omega, q, t)$$

Следовательно (131) дает следующее:

$$\sum G_{\mu\nu}(\omega, q, t)\dot\omega_\nu = -G_\mu(\omega, q, t)$$

Применяя обратную матрицу, получим уравнения вида (130). Впоследствии уравнения движения будут подвергнуты более подробному разбору.

9.. Уравнение Аппеля для маятника переменной длины.

Введем систему координат, и запишем выражение длины нити по каждой из осей: $x = l(t)\sin\varphi$, $y = -l(t)\cos\varphi$. Здесь φ - это лагранжева координата q. Запишем выражение для G :

$$G = \frac{m}{2}(\ddot{\boldsymbol{r}} - \gamma)^2 = \frac{m}{2}(\ddot x^2 + (\ddot y + \gamma)^2)$$

У нас $\dot\varphi = \omega$. Надо все выразить через φ и ω. Для этого введем полярную систему координат и найдем в ней $\dot{\boldsymbol{r}}, \ddot{\boldsymbol{r}}$ и $\boldsymbol{g}$. Далее вычислим G^* :

$$G^* = \frac{m}{2}[(\ddot l - l\omega^2 - g\cos\varphi)^2 + (l\dot\omega + 2\dot l\omega + g\sin\varphi^2]$$

Слагаемыми, которые не содержат $\dot\omega$, не нужны: $G^* = \frac{m}{2}(l\dot\omega + 2\dot l\omega + g\sin\varphi)^2$. Теперь

$$\frac{\partial G}{\partial \dot\omega} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad l\dot\omega + 2l\omega + g\sin\varphi = 0.$$

Если $l(t) \equiv l$, то получаем $\ddot\varphi - \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$ — уравнение обычного математического маятника.

10.. Виртуальные перемещения. Элементарная работа заданных сил. Принцип Даламбера-Лагранжа для систем с идеальными связями.

Виртуальным перемещением в заданном состоянии $(\dot x, x, t) \leftrightarrow (\omega, q, t)$ называется всякий набор чисел $\sigma x = (\sigma x_1, \ldots, \sigma x_k)$, который может быть разностью двух мыслимых ускорений. Они удовлетворяют

системе линейных уравнений

$$\sum \frac{\partial f_a}{\partial x_k}\sigma x_k = 0, \quad \sum \frac{\partial g_b}{\partial \dot{x}_k}\sigma x_k = 0$$

Обозначение принадлежит Н.Г.Четаеву. Обычно пишут δx, но это плохо (по крайней мере при обучении), так как символ δ имеет в теории сликом много разных смыслов. У нас $\delta x = (\delta x_1, \ldots, \delta x_k)$ считается набором произвольных чисел.

Равносильное определение истинного ускорения в заданном состоянии:

$$(M\ddot{x} - F, \sigma x) = 0.$$

[Равносильность надо доказывать!] В переменных динамики системы точек это выглядит так:

$$G = \frac{1}{2}\sum m_\nu \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu^2 - \sum(\boldsymbol{F}_\nu, \ddot{\boldsymbol{r}}) + [...] \quad \Rightarrow \quad \sum(m_\nu \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu - \boldsymbol{F}_\nu, \sigma \boldsymbol{r}_\nu) = 0, \tag{132}$$

где для уравнений связи

$$f_a(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N, t) = 0, \quad g_b(\dot{\boldsymbol{r}}_1, \ldots, \dot{\boldsymbol{r}}_N, \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N, t) = 0$$

виртуальное перемещение системы $(\sigma \boldsymbol{r}_1, \ldots, \sigma \boldsymbol{r}_N)$ задается уравнениями

$$\sum \left(\frac{\partial f_a}{\partial \boldsymbol{r}_\nu}, \sigma \boldsymbol{r}_\nu\right) = 0, \quad \sum \left(\frac{\partial g_b}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_\nu}, \sigma \boldsymbol{r}_\nu\right) = 0$$

Принцип Даламбера-Лагранжа гласит, что при заданном состоянии системы точек ускорения должны быть такими, чтобы выполнялось (132) для любого виртуального перемещения в этом состоянии.

Элементарной работой заданных сил называется выражение

$$\delta A = \sum(\boldsymbol{F}_\nu, \delta \boldsymbol{r}_\nu).$$

Напомним, $\delta \boldsymbol{r}_\nu$ произвольны. Поскольку теперь

$$m_\nu \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu(t, \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_n, \dot{\boldsymbol{r}}_1, \ldots, \dot{\boldsymbol{r}}_n) + \boldsymbol{R}_\nu,$$

получаем равносильно

$$\sum(\boldsymbol{R}_\nu, \sigma \boldsymbol{r}_\nu) = 0.$$

Это читается так: элементарная работа реакций связей на любом виртуальном перемещении равна нулю. Аксиома идеальности связей. Важно понимать, что идеальность связей нельзя доказать, так это постулат, равносильный принципу Гаусса. Идеальность можно только прокомментировать. Например, если точка движется по поверхности, то ее реакция ей ортоногальна.

11.. Общие теоремы динамики как следствия принципа д'Аламбера-Лагранжа. Действительные перемещения.

Рассмотрим систему N материальных точек $m_1, \ldots, m_N, r_1, \ldots, r_N$ и разложим заданные силы на внешние и внутренние: $\boldsymbol{F}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu^{(e)} + \boldsymbol{F}_\nu^{(i)}$.

Теорема 1. Если связи допускают виртуальное перемещение системы как единого целого вдоль некоторой неподвижной прямой, то скорость изменения проекций импульса системы на эту прямую равна проекции главного вектора заданных внешних сил на эту прямую. То же самое, но с формулами: если среди виртуальных перемещений в каждом состоянии, удовлетворяющем связям, существует перемещение вида

$$\sigma \boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{e}\delta s \ ,$$

где $\boldsymbol{e}$ - направляющий вектор неподвижной прямой, то

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{e}) = (\boldsymbol{F}^{(e)},\boldsymbol{e}),$$

где справа стоит главный вектор внешних сил: $\boldsymbol{F}^{(e)} = \sum_{\nu=1}^{N} \boldsymbol{F}_\nu^{(e)}$.

Для доказательства берем $\sigma\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{e}\delta s$ и подставляем в (132):

$$\sum m_\nu\,(\ddot{\boldsymbol{r}}_\nu,\boldsymbol{e}) = \sum(m_\nu\dot{\boldsymbol{r}}_\nu,\boldsymbol{e})^{\cdot} = (\boldsymbol{P},\boldsymbol{e})^{\cdot}$$

$$\sum_\nu(\boldsymbol{F}_\nu,\boldsymbol{e}) = \sum_\nu\left(\boldsymbol{F}_\nu^{(e)} + \boldsymbol{F}_\nu^{(i)},\boldsymbol{e}\right) = (\boldsymbol{e},\sum\boldsymbol{F}_\nu^{(e)})$$

Следствие: если $(\boldsymbol{F}^{(e)},\boldsymbol{e}) \equiv 0,$ то имеет место первый интеграл $(\boldsymbol{p},\boldsymbol{e}) = \mathrm{const}.$ Теорема 2. Если связи допускают виртуальный поворот системы как единого целого вокруг некоторой неподвижной прямой, проходящей черехз начало координат, то скорость изменения проекции кинетического момента системы на эту прямую равна проекции главного момента внешних сил на эту прямую. То же самое, но с формулами: если среди виртуальных перемещений в каждом состоянии, удовлетворяющем связям, существует перемещение вида

$$\sigma\boldsymbol{r}_\nu = [\boldsymbol{e},\boldsymbol{r}_\nu]\,\delta\varphi\ ,$$

где $\boldsymbol{e}$ - направляющий неподвижной прямой (сравните с формулой распределения скоростей при вращении вокруг оси), то

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\Lambda}_O,\boldsymbol{e}) = (\boldsymbol{G}_O^{(e)},\boldsymbol{e}),$$

где справа участвует главный момент внешних сил: $\boldsymbol{G}_O^{(e)} = \sum_{\nu=1}^{N}\left[\boldsymbol{r}_\nu \times \boldsymbol{F}_\nu^{(e)}\right]$.

Для доказательства берем

$$\sigma\boldsymbol{r}_\nu = [\boldsymbol{e},\boldsymbol{r}_\nu]\,\delta\varphi$$

и подставляем в (132):

$$\sum_\nu(m_\nu\ddot{\boldsymbol{r}}_\nu,[\boldsymbol{e},\boldsymbol{r}_\nu]) = (\boldsymbol{e},\sum_\nu[\boldsymbol{r}_\nu,m_\nu\ddot{\boldsymbol{r}}_\nu]) = (\boldsymbol{e},\sum_\nu[\boldsymbol{r}_\nu,m_\nu\dot{\boldsymbol{r}}_\nu]^{\cdot}) = (\boldsymbol{e},\dot{\boldsymbol{\Lambda}}_O) = (\boldsymbol{e},\boldsymbol{\Lambda}_O)^{\cdot}$$

$$\sum_\nu(\boldsymbol{F}_\nu,[\boldsymbol{e},\boldsymbol{r}_\nu]) = (\boldsymbol{e},\sum_\nu[\boldsymbol{r}_\nu,\boldsymbol{F}_\nu]) = (\boldsymbol{e},\sum_\nu\left[\boldsymbol{r}_\nu,\boldsymbol{F}_\nu^{(e)}\right]) = (\boldsymbol{e},\boldsymbol{\Lambda}_O^{(e)}).$$

Следствие: если $(\boldsymbol{G}_O^{(e)},e) \equiv 0,$ то имеет место первый интеграл $(\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{e}) = \mathrm{const}.$ *Действительным перемещением* рассматриваемой системы называется набор (распределение) векторов $(d\boldsymbol{r}_1,\ \ldots,\ d\boldsymbol{r}_N)$, где $d\boldsymbol{r}_\nu = \dot{\boldsymbol{r}}_\nu dt.$ Фактически это то же самое, что распределение скоростей.

Теорема 3. Если при движении со связями действительное перемещение всегда принадлежит пространству виртуальных перемещений, то

$$dT = \sum_{\nu=1}^{N}\left((\boldsymbol{F}_\nu^{(e)} + \boldsymbol{F}_\nu^{(i)},d\boldsymbol{r}_\nu\right).$$

Для доказательства $\sigma\boldsymbol{r}_\nu = d\boldsymbol{r}_\nu$ подставляем в (132):

$$\sum m_\nu(\ddot{\boldsymbol{r}}_\nu,d\boldsymbol{r}_\nu) = \sum m_\nu(\dot{\boldsymbol{v}}_\nu,d\boldsymbol{r}_\nu) = \sum m_\nu(d\boldsymbol{v}_\nu,\boldsymbol{v}_\nu) = d(\frac{1}{2}\sum m_\nu v_\nu^2) = dT\ .$$

Соль этих трех теорем в том, что в правых частях не возникают реакции связей.

Вопрос. Есть одна точка, которая ползет по воздушному шарику, когда его надувают

$$x^2 + y^2 + x^2 = (t+1)^2 \quad t \in [0,1]$$

Что такое $d\boldsymbol{r}$? Что такое $\sigma\boldsymbol{r}$? **Ответ:** $d\boldsymbol{r} = (dx,dy,dz)$ удовлетворяет условию, получающемуся при взятии полной производной от уравнения связи: $xdx + ydy + zdz = (t+1)dt$ в каждый данный момент времени; $\sigma\boldsymbol{r} = (\sigma x,\sigma y,\sigma z)$ удовлетворяет условию $x\sigma x + y\sigma y + z\sigma z = 0.$ Пока $t \neq -1,$ получаем две плоскости. При $t = -1$ уравнение связи вырождается, то есть мы попадаем в условия, не предусмотренные теорией.

12.. Уравнения с множителями Лагранжа для систем со связями.

Это еще одно равносильное определение движений (истинных ускорений):

$$\begin{cases} m_\nu \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu + \sum\limits_{a=1}^{A} \lambda_a \dfrac{\partial f_a}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} + \sum\limits_{b=1}^{B} \mu_b \dfrac{\partial g_b}{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_\nu} \quad , \\ f_a(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N, t) = 0, \ a = 1, \ldots, A \ , \\ g_b(\dot{\boldsymbol{r}}_1, \ldots, \dot{\boldsymbol{r}}_N, \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N, t) = 0, \ b = 1, \ldots, B \quad , \end{cases}$$

где λ_a, μ_b — неопределенные множители, их число равно числу связей $A + B$.

Выписанная система уравнений замкнута относительно переменных r_ν, λ_a, μ_b. Часть уравнений дифференциальные, часть — функциональные.

13.. Уравнения Лагранжа для систем с геометрическими связями и произвольными силами. Понятие обобщенной силы.

Исходим из динамики точки в многомерном пространстве. Пусть заданы голономные связи, т.е. $f(x,t) = 0 \leftrightarrow x = x^*(q,t)$, где $q = \{q_1, \ldots, q_n\}$ - лагранжевы(обобщенные) координаты. В заданном состоянии $\dot{x}, x, t$, согласованном со связями, истинное ускорение таково, что

$$(M\ddot{x} - \mathcal{F}, \sigma x) = 0 \tag{133}$$

для любого виртуального перемещения σx, удовлетворяющего определению $\sum \dfrac{\partial f}{\partial x_l} \sigma x_l = 0$. Лемма:

$$\sigma x = \delta x^*(q,t) = \sum \frac{\partial x^*}{\partial q_i} \delta q_i$$

где δq_i произвольны, вектора $\dfrac{\partial x^*}{\partial q_i}$ образуют базис в плоскости виртуальных перемещений.

Так как $x = x^*(q,t)$, то $\dot{x} = \dfrac{\partial x}{\partial t} + \sum \dfrac{\partial x}{\partial q_i} \dot{q}_i = \dot{x}^*(\dot{q}, q, t)$, после подстановки

$$(133) \Leftrightarrow (M\ddot{x} - \mathcal{F}, \frac{\partial x^*}{\partial q_i}) = 0, i = 1, \ldots, n \Leftrightarrow M\left(\frac{d\dot{x}^*}{dt}, \frac{\partial x^*}{\partial q_i}\right) = \left(\mathcal{F}, \frac{\partial x^*}{\partial q_i}\right) \Leftrightarrow (!)$$

Лемма. Для произвольной функции $f(q,t)$ имеем $\dot{f} = \sum \dfrac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \dfrac{\partial f}{\partial t}$; следовательно,

$$\frac{\partial \dot{f}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial f}{\partial q_i},$$

и вспоминая формулу дифференцирования произведения двух функций, получаем

$$\frac{d}{dt} M\left(\dot{x}^*, \frac{\partial \dot{x}^*}{\partial \dot{q}_i}\right) - M\left(\dot{x}^*, \frac{d}{dt}\frac{\partial x^*}{\partial q_i}\right) = \sum \mathcal{F}_l(\dot{x}^*(\dot{q}, q, t), x^*(q,t), t) * \frac{\partial x_l^*}{\partial q_i} = Q_i(\dot{q}, q, t) \tag{134}$$

где Q_i - *обобщенные силы.*

Еще лемма: операции $\dfrac{d}{dt}$ и $\dfrac{\partial}{\partial q_i}$ перестановочны:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f(q,t)}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i}\frac{df(q,t)}{dt}$$

Введем функцию $T^* = \frac{M}{2}(\dot{x}^*, \dot{x}^*)$ — кинетическую энергию, записанную в обобщенных координатах и скоростях. Тогда $\dfrac{\partial T^*}{\partial z} = M\left(\dot{x}^*, \dfrac{\partial \dot{x}^*}{\partial z}\right)$, где для краткости через z мы обозначили либо q_i, либо $\dot{q}_i$. Отсюда и из вышесказанного

$$(!) \iff \frac{d}{dt} M\left(\dot{x}^*, \frac{\partial \dot{x}^*}{\partial \dot{q}_i}\right) - M\left(\dot{x}^*, \frac{\partial \dot{x}^*}{\partial q_i}\right) = Q_i(\dot{q}, q, t) \iff \frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T^*}{\partial q_i} = Q_i(\dot{q}, q, t) \tag{135}$$

Получили систему уравнений Лагранжа в общем виде, что равносильно определению движений для систем с геометрическими связями (для голономных систем).

Если уравнения связей не зависят от времени, и $x = x^*(q)$, то T^* будет положительно-определенной квадратичной формой обобщенных сколростей $\dot{q}_i$.

Предположим, что силы *потенциальны*, то есть $Q_i \equiv -\dfrac{\partial V(q,t)}{\partial q_i}$. Тогда уравнения (135) превращаются в такие:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad L = T^* - V. \tag{136}$$

14.. Корректность (равносильность при заменах переменных) лагранжевой формы уравнений движения.

Мы говорим, что задана *лагранжева система* или *система уравнений в форме Лагранжа*, если

1. явно выписана некоторая функция
$$L(\dot{q}_1, ..., \dot{q}_n, q_1, ..., q_n, t)$$
называемая *функцией Лагранжа*, или *лагранжианом*;

2. набор функций $q_1(t), ..., q_n(t)$ называется *движением системы* $\Longleftrightarrow$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \equiv 0\,, \qquad i = 1, ..., n\,; \tag{137}$$

В ЛАГРАНЖИАНЕ МОЖНО ДЕЛАТЬ НЕВЫРОЖДЕННУЮ ЗАМЕНУ ПЕРЕМЕННЫХ. Пусть $q = q(\xi, t)$, предполагая, что $\det\left\|\dfrac{\partial q_i}{\partial \xi_k}\right\| \neq 0$. Имеем

$$\dot{q}_i = \sum_k \frac{\partial q_i}{\partial \xi_k}\dot{\xi}_k + \frac{\partial q_i}{\partial t}$$

Подставим все это в $L:\ L^*(\dot{\xi}, \xi, t) = L(\dot{q}(\dot{\xi}, \xi, t), q(\xi, t), t)$ и в новых переменных напишем уравнения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\xi}_k} - \frac{\partial L^*}{\partial \xi_k} = 0 \tag{138}$$

Утверждается: равносильны уравнения (137) и (138)

Действительно,

$$\frac{\partial L^*}{\partial \dot{\xi}_k} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{\xi}_k}, \quad \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\xi}_k} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} q_i \xi_k$$

В дальнейшем писать звездочку у лагранжиана в новых переменных не будем:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_k} = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\frac{\partial q_i}{\partial \xi_k} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial q_i}{\partial \xi_k}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi_k} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial \xi_k} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \xi_k} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial \xi_k} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\left(\sum_l \frac{\partial^2 q_i}{\partial \xi_k \partial \xi_l}\dot{\xi}_l + \frac{\partial^2 q_i}{\partial t \partial \xi_k}\right)$$

Осюда

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_k} - \frac{\partial L}{\partial \xi_k} = \sum_i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right)\frac{\partial q_i}{\partial \xi_k} = 0$$

Дальнейшее ясно.

15.. Исчисление ковекторов. Общее понятие вариации функции, правило поглощения полной производной.

Начальное определение.

Ковектор — всякая сумма вида $\mathcal{K} = \sum K_l(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(p)})\delta x_l$, где $\delta x = (\delta x_1, \ldots, \delta x_k)$ — произвольный набор чисел.

Например, элементарная работа заданных сил $\delta A = \sum \mathcal{F}_l(\dot{x}, x, t)\delta x_l$.

Из функций можно делать ковекторы. Существует несколько правил $\Theta: \ F \xrightarrow{\Theta} K$.

Центральное определение.

Вариацией функции $F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(p)})$ называется ковектор $\boldsymbol{\delta} F = \sum \dfrac{\partial F}{\partial x_l^{(p)}}\delta x_l$, если не все упомянутые производные тождественно равны нулю.. В частности,

$$\boldsymbol{\delta} f(x, t) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_l}\delta x_l$$

$$\boldsymbol{\delta} g(\dot{x}, x, t) = \sum \frac{\partial g}{\partial \dot{x}_l}\delta x_l$$

Обратите внимание, здесь употреблена полужирная $\boldsymbol{\delta}$. Это опять-таки ради избежания двусмысленностей.

Теперь можно делать делать подстановки в ковекторы. Например,

$$(\delta A)^* = (\sum \mathcal{F}_l \delta x_l)^* = \sum (\mathcal{F}_l)^* \boldsymbol{\delta} x_l = \sum Q_i \delta q_i$$

Здесь Q_i — те самые обобщенные силы, которые были введены раньше.

Правило поглощения точки:

$$\boldsymbol{\delta}\dot{F} = \boldsymbol{\delta} F$$

Доказательство для $f(x, t)$ (в общем виде - упражнение):

$$\boldsymbol{\delta} f = \sum \frac{\partial f}{\partial x_l}\delta x_l \ , \ \dot{f} = \sum \frac{\partial f}{\partial x_l}\dot{x}_l + \frac{\partial f}{\partial t} \ , \ \boldsymbol{\delta}\dot{f} = \sum \frac{\partial \dot{f}}{\partial \dot{x}_l}\delta x_l = \sum \frac{\partial f}{\partial x_l}\delta x_l \ .$$

Те же определения можно применять к функциям $\Phi(t, q, \dot{q}, \ldots)$, тогда $\boldsymbol{\delta} x = \boldsymbol{\delta}\dot{x} = \boldsymbol{\delta}\ddot{x}$.

Лемма: Если наложены только геометрические связи, то $\sigma x = \boldsymbol{\delta} x$.

16.. Вариация Эйлера-Лагранжа. Ковариантность вариации и вариации Эйлера-Лагранжа. Применение ковариантности.

Определение. Для каждой функции $F(\dot{x}, x, t)$ введем производную Эйлера-Лагранжа:

$$[F]_l = \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_l} - \frac{\partial F}{\partial x_l}.$$

Если есть функция $F(\dot{x}, x, t)$, то ее *вариацией Эйлера-Лагранжа* в переменных $(\ddot{x}, \dot{x}, x, t)$ называется ковектор

$$\boldsymbol{\delta}[F] = \sum [F]_l \delta x_l = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_l} - \frac{\partial F}{\partial x_l}\right)\delta x_l.$$

Точно такое же определение можно дать и в переменных $(\ddot{q}, \dot{q}, q, t)$. Рассмотрим произвольный ковектор $\mathcal{K} = \sum K_l(t, x, \dot{x}, \ldots)\delta x_l$ Перейдем к обобщенным координатам $(x = x^*(q, t))$ и произведем подстановку.

Определение *ковариатности.* Пусть некоторый объект (ковектор, функция, еще что-нибудь) $\mathcal{K}$ порожден функцией Ψ, то есть $\mathcal{K} = \mathcal{O}(\Psi)$. Действия $\mathcal{O}$ могут быть исполнены в любых переменных. Если применение $\mathcal{O}$ и подстановка коммутируют,

$$(\mathcal{O}(\Psi))^* \equiv \mathcal{O}(\Psi^*),$$

то станем говорить, что операция $\mathcal{O}$ *ковариантна.* Это свойство резко сокращает работу при подстановках в $\mathcal{K}$, особенно если это ковектор, порожденный функцией.

Операция $F \mapsto \dot{F}$ ковариантна.

Операции $\boldsymbol{\delta}$ и $\boldsymbol{\delta}[\cdot]$ ковариантны.

Для доказательства надо педантично совершить подстановку, собрать подобные члены и учесть ряд тождеств,уже отмеченных выше. См. также доказательство корректности замены переменны в лагранжиане.

Доказанные свойства очень полезны в лагранжевом формализме.

Пример: силы называются *потенциальными*, если $\delta\mathcal{A} \equiv -\boldsymbol{\delta}V(x,t)$, то есть $\mathcal{F}_l \equiv -\partial V/\partial x_l$.

Это определение ковариантно при подстановках лагранжевых координат, так что вместо преобразования элементарной работы при подстановке достаточно преобразовать потенциал V. Получим $Q_i = -\dfrac{\partial V}{\partial q_i}$.

17.. Энергия ускорений для твердого тела.

Для абсолютно твердого тела есть формула

$$T = \frac{1}{2}M\boldsymbol{v}_S^2 + \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2),$$

в которой M – масса тела, $\boldsymbol{v}_S$ - скорость центра масс тела, A, B, C - главные моменты инерции, (p, q, r) - компоненты угловой скорости в главных осях, то есть

$$\boldsymbol{\omega} = p\boldsymbol{e}_1 + q\boldsymbol{e}_2 + r\boldsymbol{e}_3. \tag{139}$$

Здесь $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ - главный центральный репер, жестко связанный с телом.

Нечто похожее можно написать энергии ускорений. Для начала используется формула Кенига для этой функции, а затем отчетливо используется специфика распределения ускорений в твердом теле. Отметим также, что угловое ускорение

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{p}\boldsymbol{e}_1 + \dot{q}\boldsymbol{e}_2 + \dot{r}\boldsymbol{e}_3 \ ,$$

то есть при дифференцировании угловой скорости базисные векторы можно не дифференцировать. Итоговый результат:

$$S = \frac{1}{2}(A\dot{p}^2 + B\dot{q}^2 + C\dot{r}^2) + (C - B)\dot{p}qr + (A - C)\dot{q}rp + (B - A)\dot{r}pq + [...].$$

18.. Вывод уравнений Эйлера для вращения по инерции из уравнений Аппеля.

Продифференцировать предыдущее по $\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}$ и приравнять нулю.

19.. Вычисление элементарной работы заданных сил для твердого тела.

Имеем $\delta A = \sum(\boldsymbol{F}_\nu, \delta\boldsymbol{r}_\nu) = \sum \mathcal{F}_l \delta x_l$.

Введем *ЗАМЕНИТЕЛЬ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ РАБОТЫ*

$$\mathcal{S}_F = \sum \mathcal{F}_l \ddot{x}_l = \sum (\boldsymbol{F}_\nu, \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu)$$

Тогда

$$\delta A = \boldsymbol{\delta} \mathcal{S}_F \ ,$$

но вычислять заменитель гораздо удобнее.

Ранее было доказано, что $\dfrac{dT}{dt} = (\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{v}_A) + (\boldsymbol{G}_A, \boldsymbol{\omega})$. Докажем, что

$$\delta A = (\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\delta v}_A) + (\boldsymbol{G}_A, \boldsymbol{\delta \omega}) \, .$$

Обратим внимание на то, что операция $\boldsymbol{\delta}$ применяется совершенно прозрачно, ибо

$$\boldsymbol{v}_A = \dot{\boldsymbol{r}}_A = \boldsymbol{v}_A = \frac{d}{dt}\boldsymbol{r}_A = \sum \frac{\partial \boldsymbol{r}_A}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \boldsymbol{r}_A}{\partial t}, \quad \boldsymbol{\omega} = \sum \boldsymbol{\omega}_i(q,t)\dot{q}_i + \omega_0(q,t).$$

Воспользуемся формулой Ривальса. Получим

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_F = \sum (\boldsymbol{F}_\nu, \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu) = \sum \Big(\boldsymbol{F}_\nu, \boldsymbol{a}_A + \Big[\boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{Am_\nu}\Big]\Big) + \Big[\boldsymbol{\omega} \times \Big[\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{Am_\nu}\Big]\Big]) = \\ = \sum (\boldsymbol{F}_\nu, \boldsymbol{a}_A) + \sum (\boldsymbol{F}_\nu, \Big[\boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{Am_\nu}\Big]) = (\sum \boldsymbol{F}_\nu, \boldsymbol{a}_A) + \Big(\boldsymbol{\varepsilon}, \sum \Big[\overrightarrow{Am_\nu} \times \boldsymbol{F}_\nu\Big]\Big) \end{aligned}$$

Отсюда $\mathcal{S}_F = (\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{a}_A) + (\boldsymbol{G}_A, \boldsymbol{\varepsilon})$, так что элементарная работа

$$\delta A = \boldsymbol{\delta} \mathcal{S}_F = (\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\delta a}_A) + (\boldsymbol{G}_A, \boldsymbol{\delta \varepsilon}) = (\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\delta} \ddot{\boldsymbol{r}}_A) + (\boldsymbol{G}_A, \boldsymbol{\delta} \dot{\boldsymbol{\omega}}) = (\boldsymbol{\Phi}, \delta \dot{\boldsymbol{r}}_A) + (\boldsymbol{G}_A, \boldsymbol{\delta \omega}) \, .$$

Использовано правило поглощения точки. Под занавес можно даже заменить $\delta \dot{\boldsymbol{r}}_A$ на $\delta \boldsymbol{r}_A$.

20.. Явный вид уравнений Лагранжа для натуральной системы с одной степенью свободы.

Пусть дан так называемый натуральный лагранжиан

$$L(\dot{q}, q) = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2 - V(q) \, ; \tag{140}$$

В этом случае уравнение Лагранжа имеет вид

$$a(q)\ddot{q} + \frac{1}{2} a'(q) \dot{q}^2 + V'(q) \equiv 0 \tag{141}$$

ЭТОТ РЕЗУЛЬТАТ НАДО ЗАПОМНИТЬ.

Если некоторое уравнение второго порядка имеет первый интеграл

$$H = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2 + V(q) \, ,$$

то мы можем восстановить уравнение Лагранжа, взяв d/dt. В случае ОДНОЙ степени свободы знание интеграла энергии равносильно уравнению Лагранжа.

21.. Явный вид уравнений Лагранжа для натуральной (обратимой) системы со многими степенями свободы.

Натуральный лагранжиан имеет вид

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - V(q) = \frac{1}{2}\Big(\dot{q} \cdot A \dot{q}\Big) - V.$$

Здесь $A(q) = \|a_{ij}(q)\|$ — невырожденная симметрическая матрица, и имеется в виду формальное скалярное произведение: $\alpha \cdot \beta = \sum \alpha_i \beta_i$.

Реально форма $(A\dot{q}, \dot{q})$ всегда положительно определена, откуда не только $\det A \neq 0$, $\exists A^{-1}$, но и, например, $a_{ii} > 0$.

Уравнения Лагранжа таковы:

$$\sum_j a_{ij}(q)\ddot{q}_i + \frac{1}{2}\sum_{j,k}\left(-\frac{\partial a_{jk}(q)}{\partial q_i} + \frac{\partial a_{ki}(q)}{\partial q_j} + \frac{\partial a_{ij}(q)}{\partial q_k}\right)\dot{q}_j\dot{q}_k + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0$$

То же самое в векторной записи

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = A\ddot{q} + \Gamma(q, \dot{q}) + \frac{\partial V}{\partial q} = 0 \tag{142}$$

Умножим (142) на $A^{-1} = \|a^{ij}\|$:

$$\ddot{q} + \sum_{i,j}\Gamma^k_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j = -\sum_i a^{ki}\frac{\partial V}{\partial q_i}.$$

Для тех, кто поймет: Γ^k_{ij} – символы Кристоффеля для римановой метрики $ds^2 = \sum_{i,j} a_{ij}(q)\, dq_i\, dq_j$. Здесь написано естественное обобщение уравнения Ньютона для движения под действием потенциальной силы.

22.. Разрешимость уравнений Лагранжа относительно вторых производных по времени от обобщенных координат. Невырожденные лагранжианы.

Выпишите их подробно и поймите, что надо потребовать

$$\det\left\|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_i}\right\| \neq 0\ . \tag{143}$$

23.. Лагранжева форма уравнений движения для свободной точки. Уравнения Лагранжа в относительном движении: силы инерции и порождающий их лагранжиан.

Уравнения движения точки под действием потенциальной силы порождаются следующим лагранжианом:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z, t), \quad \Rightarrow \tag{144}$$

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z} \tag{145}$$

Выберем подвижную систему координат $\xi\eta\zeta$. Возьмем самый простой вариант $x = \xi\cos\omega t - \eta\sin\omega t$, $y = \xi\sin\omega t + \eta\cos\omega t$, $z = \zeta$. Тогда после подстановки потенциальная энергия становится функцией от новых переменных $V = V(\xi, \eta, \zeta, t)$. Кинетическая энергия

$$T = \frac{m\boldsymbol{v}^2}{2} = \frac{m}{2}(\boldsymbol{v}^2_{\text{абс}}) = \frac{m}{2}(\boldsymbol{v}_{\text{отн}} + \boldsymbol{v}_{\text{пер}})^2 =$$

После преобразований

$$L = \frac{m}{2}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + m(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}) + \frac{m}{2}(\xi^2 + \eta^2)\omega^2 - V(\xi, \eta, \zeta, t) \tag{146}$$

Теперь надо выписать уравнения Лагранжа и убедиться, что второе слагаемое порождает силу инерции Кориолиса, третье — переносную силу инерции (разумеется, с обратным знаком, так как все члены уравнений стоят слева, а справа — только нуль.)

(#) Лагранжиан после перехода в произвольную подвижную систему координат.

Это — ответ на упражнение, данное на лекции: рассмотрим лагранжиан свободной материальной точки в неподвижной системе $Oxyz$ и перепишем его в подвижной системе отсчета $A\xi\eta\zeta$:

$$L = \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}m\left(\boldsymbol{v}_A + [\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}] + \frac{\delta\boldsymbol{\rho}}{\delta t}\right)^2 = \tag{147}$$

$$= \frac{m}{2}\left(\frac{\delta\boldsymbol{\rho}}{\delta t}\right)^2 + \frac{m}{2}\left(\boldsymbol{v}_A + [\boldsymbol{\omega}\times\rho]\right)^2 + m\left(\boldsymbol{v}_A + [\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}], \frac{\delta\boldsymbol{\rho}}{\delta t}\right). \tag{148}$$

Последние два слагаемые, взятые с обратным знаком, порождают силы инерции.

24.. Обобщенный интеграл энергии (интеграл Якоби-Пенлеве).

Пусть заданы уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad , \qquad i = 1, ..., n\,,$$

а лагранжиан L деле явно от времени не зависит, т. е. $dL/dt = 0$ или $L = L(\dot{q}, q)$. Тогда имеет место первый интеграл (интеграл «энергии», интеграл Якоби, интеграл Якоби–Пенлеве)

$$H(\dot{q}, q) = \sum \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\ . \tag{149}$$

Действительно,

$$\frac{dH}{dt} = \sum_i \left(\dot{q}_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) + \sum_i \left(\ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \sum_i \left(\dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\right) -$$
$$- \sum_i \left(\ddot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \sum_i \dot{q}_i \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right) = 0.$$

В общем случае системы с потенциальными силами $L = T - V = T_2 + T_1 + T_0 - V = L_2 + L_1 + L_0$, где T_2 — квадратичная форма $\dot{q}$, T_1 — линейная форма, T_0 от скоростей не зависит. [Линейные члены в лагранжиане могут появляться и при наличии обобщенного потенциала.] Пусть такой лагранжиан явно не зависит от времени. Запишем интеграл Якоби:

$$H = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i} + \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i} - T_2 - T_1 - T_0 + V = 2T_2 + T_1 - T_2 - T_1 - T_0 + V = L_2 - L_0$$

Видим: интеграл Якоби от линейных членов не зависит, вместе с тем полная энергия $T+V = T_2+T_1+T_0+V$ не является интегралом Якоби.

25.. Уравнения Лагранжа в случае обобщенно-потенциальных сил, функция Лагранжа.

Определение: заданные силы $\mathcal{F}$ называются обобщенно-потенциальными, если $\delta A \equiv \boldsymbol{\delta}[W(\dot{x}, x, t)]$ (где W - обобщенный потенциал) или $\mathcal{F}_l \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial \dot{x}_l} - \frac{\partial W}{\partial x_l}$. Это определение ковариантно при подстановках, так что вместо преобразования элементарной работы при подстановке достаточно преобразовать обобщенный потенциал.

Если связей нет, то уравнение движения записывается в виде $M\ddot{x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = \mathcal{F}$, где $T = \frac{M}{2}\dot{x}^2$. Следовательно, если $\mathcal{F}_l$ — обобщенно-потенциальная сила, то $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial W}{\partial x}$. Обозначив $L = T - W$, получим:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

Функция L называется лагранжианом.

В силу ковариантности по введении обобщенных координат снова будем иметь уравнения в лагранжевой форме.

26.. Обобщенный потенциал: он линеен по скоростям.

$$\mathcal{F}_l = \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial \dot{x}_l} - \frac{\partial W}{\partial x_l} = \sum_k \frac{\partial^2 W}{\partial \dot{x}_l \partial \dot{x}_k}\ddot{x}_k + \sum_k \frac{\partial^2 W}{\partial \dot{x}_l \partial x_k}\dot{x}_k + \frac{\partial^2 W}{\partial \dot{x}_l \partial t} - \frac{\partial W}{\partial x_l}$$

Обозначим $W_k \equiv \frac{\partial W}{\partial \dot{x}_k}$. Обязательно должно быть $\frac{\partial^2 W}{\partial \dot{x}_l \partial \dot{x}_k} \equiv 0$, так как обобщенные силы не должны зависеть от ускорений, а это значит, что W - линейная функция:

$$W = \sum W_k(x,t)\dot{x}_k + V(x,t) \tag{150}$$

27.. Структура обобщенно-потенциальных сил. Калибровка лагранжиана.

Для обобщенно-потенциальных сил

$$\mathcal{F}_l = \sum \frac{\partial W_l}{\partial x_k}\dot{x}_k + \frac{\partial W_l}{\partial t} - \sum \frac{\partial W_k}{\partial x_l}\dot{x}_k - \frac{\partial V}{\partial x_l} = \sum (\frac{\partial W_l}{\partial x_k} - \frac{\partial W_k}{\partial x_l})\dot{x_k} + \frac{\partial W_l}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x_l}$$

К L всегда можно прибавить функцию, являющуюся полной производной по времени некоторой функции положения и времени:

$$\dot{f} = \frac{d}{dt}f(q,t)$$

Эта операция называется *калибровкой*. Уравнения Лагранжа от этого не изменяются.

28.. Циклические координаты и соответствующие им первые интегралы.

Если

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} \equiv 0,$$

тогда переменная q_k называется *циклической*, или *игнорируемой*, в системе переменных $q_1, \ldots, q_k$ и из уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = c \text{ — } \textit{циклический интегал} \tag{151}$$

В случае натурального лагранжиана циклический интеграл линеен по скоростям.

29.. Интегралы импульса и кинетического момента, как примеры циклических интегралов.

Например, точка в поле тяжести и волчок Лагранжа.

30.. Изменение функции Якоби-Пенлеве.

Если рассмотреть общие уравнения Лагранжа, а именно

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i,$$

то дифференцированием (149) получим обобщение теоремы об изменении кинетической энергии:

$$\frac{dH}{dt} = \sum Q_i \dot q_i. \tag{152}$$

31.. Гироскопические и диссипативные силы. Диссипативная функция Рэлея.

Пусть обобщенные силы не зависят от времени и линейны по скоростям:

$$Q_i = \sum K_{ij}(q)\dot q_j.$$

Матрица $K = G - D$, где $G = -G^T$ — кососимметрическая, $D = D^T$ — симметрическая. Тогда Q_i разбиваются на два слагаемых: соответственно *гироскопические* $Q_i^{\text{г}}$ и *диссипативные* $Q_i^{\text{д}}$ силы.

Тогда

$$\sum Q_i \dot q_i = \sum Q_i^{\text{д}} \dot q_i = -\sum\sum {}_{ij}(q)\dot q_i \dot q_j$$

Гироскопические силы не влияют на изменение H.

Обобщенно-потенциальные силы $\sum(\frac{\partial W_l}{\partial x_k} - \frac{\partial W_k}{\partial x_l})\dot{x_k}$ являются гироскопическими; обратное неверно.

Пусть матрица D положительна определена. Тогда при движении энергия H, вообще говоря, убывает, рассеивается. Это явление и называется диссипацией энергии.

Строго говоря, термин «диссипативные» следует употреблять, когда дииспация действительно имеет место. Предпочтительнее было бы говорить *рэлеевы силы*, так как

$$Q_i^{\text{д}} = -\frac{\partial R}{\partial \dot q_i} \iff \delta A^{\text{д}} = -\boldsymbol{\delta} R,$$

где $R = \frac{1}{2}\sum {}_{ij}(q)\dot q_i \dot q_j$ — так называемая *(диссипативная) функция Рэлея.*

Это определение ковариантно при подстановках, так что вместо преобразования элементарной работы при подстановке обобщенных координат‘ достаточно преобразовать диссипативную функцию Рэлея.

32.. Уравнения Максвелла и обобщенный потенциал для силы Лоренца.

Заряд q помещен в электромагнитное поле; оно характеризуется двумя векторными полями: напряженностью электрического поля $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ и индукцией магнитного поля $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$. Сила Лоренца имеет вид ($\boldsymbol{v}$ — скорость заряда, c — величина скорости света)

$$\boldsymbol{F} = q\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\left[\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right]\right).$$

При написании силы Лоренца пренебрегают собственным электромагнитным полем движущегося заряда, которое, строго говоря, следовало бы прибавлять к заданному.

Поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ не произвольны. Законом их изменения в пространстве и во времени являются **УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА.**

Первая группа уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \operatorname{div}\boldsymbol{E} = 4\pi\rho(\boldsymbol{r},t) \\ \operatorname{rot}\boldsymbol{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\dot{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{r},t) \end{cases}$$

Справа стоят плотность электрических зарядов ρ и электрический ток $\boldsymbol{j}$.

Поскольку в природе магнитных зарядов нет, вторая группа уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

Теперь

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \Leftrightarrow B = \operatorname{rot} \boldsymbol{A} \Rightarrow \operatorname{rot}(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{r}, t).$$

$$\boldsymbol{F} = q(-\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{c}\,[\boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{A}])$$

Сила Лоренца обобщенно потенциальна:

$$W = q\left[\varphi - \frac{1}{c}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{v})\right] = q\left[\varphi(x, y, z, t) - \frac{1}{c}(A_x\dot{x} + A_y\dot{y} + A_z\dot{z})\right]$$

33.. Уравнения равновесия в независимых лагранжевых координатах. Случай потенциальных сил.

Пусть q - обобщенные координаты, $\dot{q}$ - обобщенные скорости, $T = \frac{1}{2}(A(q)\dot{q}, \dot{q})$ - кинетическая энергия, $Q = Q(q, \dot{q})$ - обобщенные силы.

Запишем уравнения Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial q} + Q \tag{153}$$

Если обобщенные силы - позиционны и потенциальны, то $Q = Q(q) = -\dfrac{\partial V}{\partial q} = \dfrac{\partial U}{\partial q}$, где $V = V(q)$ — потенциальная энергия, $U = -V$ — силовая функция. Тогда уравнение (153) можно переписать в виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial q} - \frac{\partial V}{\partial q} \tag{154}$$

Условия при которых будет достигаться состояние равновесия: $q(t) \equiv q_0$, $\dot{q}(t) \equiv 0$, таковы:

$$Q(q_0, 0) = 0 \tag{155}$$

или, в частности,

$$\frac{\partial V}{\partial q} = 0 \tag{156}$$

Положения равновесия соответствуют критическим точкам потенциальной энергии.

34.. Переход к каноническим импульсам (преобразование Лежандра и его обратимость).

Уравнения Лагранжа можно записать в виде уравнений первого порядка

$$\frac{dq_i}{dt} = v_i \quad , \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i(v, q, t) \ ,$$

где q, v — —фазовые переменные.

Но есть фазовые переменные получше:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i}(v, q, t).$$

Это *канонические импульсы*. Все вместе переменные $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ — (канонические фазовые переменные).

Выразим v из $p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i}(v, q, t)$ (это возможно в силу невырожденности): $v_i = v_i(p, q, t)$. Рассмотрим *функцию Гамильтона*

$$H = \left(\sum \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right) \mid_{\dot{q}_i = v_i(p,q,t)} = \left(\sum p_i \dot{q}_i - L\right) \mid_{\dot{q} = v(p,q,t)}$$

Продифференцировав H по p_i получим

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = v_i + \sum p_k \frac{\partial v_k}{\partial p_i} - \sum \frac{\partial L}{\partial v_k} \frac{\partial v_k}{\partial p_i} = v_i,$$

т.к. $p_k = \frac{\partial L}{\partial v_k}$, суммы взаимно уничтожаются.

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \sum p_k \frac{\partial \boldsymbol{v}_k}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \sum \frac{\partial L}{\partial v_k} \frac{\partial \boldsymbol{v}_k}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}$$

по аналогичной причине.

Предложенный выше переход от $\dot{q}$ к p называется преобразованием Лежандра.

Стоит отметить, что обратное преобразование может быть получено по точно такой же схеме: $\dot{q} = \partial H / \partial p$, $L = (p, \dot{q}) - H$.

35.. Система уравнений движения в канонических переменных с произвольными силами.

После преобразования Лежандра уравнения движения могут быть удобно записаны в виде системы из $2n$ дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i \\ \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases}$$

36.. Система уравнений Гамильтона

получается в предположении, что непотенциальных сил нет:

$$\begin{cases} \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases}$$

37.. Функция Гамильтона натуральной системы.

Если $L = \frac{1}{2}(A(q)\dot{q}, \dot{q}) - V(q)$, то $p = A\dot{q}$ и (запомнить!)

$$H = \frac{1}{2}(p, A^{-1}p) + V(q)$$

38.. Простейшие первые интегралы гамильтоновых систем. Понижение порядка гамильтоновой системы с помощью циклических интегралов.

Если $\dfrac{\partial H}{\partial t} \equiv 0$, то $H = h = \mathrm{const}$(интеграл энергии).

Переменная q_n называется циклической (в системе всех данны канонических переменных), если $\dfrac{\partial H}{\partial q_n} = 0$. Уравнения Гамильтона для нее и сопряженной переменной p_n запишутся в виде

$$\begin{cases} \dot{p_n} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_n} = 0 \\ \dot{q_n} = \dfrac{\partial H}{\partial p_n} \end{cases} \tag{157}$$

Вывод 1: $p_n = c = \mathrm{const}$ — *циклический интеграл.* Из начальных условий или иных соображений зафиксируем постоянную c.

Вывод 2: обозначив $H_c = H(p_1, \ldots, p_{n-1}, c, q_1, \ldots, q_{n-1})$, получим приведенную систему уравнений меньшего порядка:

$$\begin{cases} \dot{p_\lambda} = -\dfrac{\partial H_c}{\partial q_\lambda} = 0 \\ \dot{q_\lambda} = \dfrac{\partial H_c}{\partial p_\lambda} \\ \lambda = 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

Вывод 3: решив эту систему, потом можно будет найти $q_n(t)$.

39.. Отделение переменных в гамильтониане. Полное разделение переменных.

Допустим, что гамильтониану можно придать вид

$$H(p_1, \ldots, p_m, \underline{p_{m+1}, \ldots, p_n}; q_1, \ldots, q_m, \underline{q_{m+1}, \ldots, q_n}, t) =$$
$$\Phi(t, p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m, \underline{f(p_{m+1}, \ldots, p_n, q_{m+1}, \ldots, q_n)}),$$

то есть переменные $f(p_{m+1}, \ldots, p_n, q_{m+1}, \ldots, q_n)$ *отделяются.*

Утверждение 1: $f(p_{m+1}, \ldots, p_n, q_{m+1}, \ldots, q_n) = c$ — первый интеграл.

Утверждение 2: зафиксировав c, для оставшихся переменных можно написать уравнеия Гамильтона низшего порядка.

Допустим,что гамильтониан H можно представить в виде суммы n слагаемых

$$H = H_1(p_1, q_1) + H_2(p_2, q_2) + \ldots + H_n(p_n, q_n)$$

Запишем для такого представления систему уравнений Гамильтона

$$\begin{cases} \frac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{dq_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \\ i = 1, \ldots, n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial (H_1 + \ldots + H_n)}{\partial q_i} \\ \frac{dq_i}{dt} = \dfrac{\partial (H_1 + \ldots + H_n)}{\partial p_i} \\ i = 1, \ldots, n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H_i}{\partial q_i} \\ \frac{dq_i}{dt} = \dfrac{\partial H_i}{\partial p_i} \end{cases}$$

Ка;дую $i-$ую систему можно интегрировать отдельно: $H_i(p_i, q_i) = h_i, i = 1, \ldots, n$

(#) Правильное умножение гамильтониана на число (преобразование подобия)

Если лагранжиан $L(\dot{q}, q, t)$ умножить на $C \neq 0$, то уравнения Лагранжа не изменятся. Для уравнений Гамильтона от того же самого скорость изменения переменных изменяется. Однако верно

Утверждение. Если $p(t)$, $q(t)$ — решение системы, порожденной гамильтонианом $H(p, q, t)$, то $P(t) = \frac{p(t)}{C}$, $Q(t) = q(t)$ есть решение системы, порожденной $\frac{1}{C}H(CP, Q, t)$

40.. Метод Рауса игнорирования циклических координат. Приведенная система (уравнения Рауса).

Рассмотрим $q_i, i = 1, \ldots, n$. Сделаем следующие обозначения: $q_1, \ldots, q_m$ обозначим через x_λ, а $q_{m+1}, \ldots, q_n$ - через ξ_s.

Предположение 1: $L = L(\dot{x}, \dot{\xi}, x, t)$ то есть все переменные ξявляются циклическими. Уравнения Лагранжа примут вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_\lambda} - \frac{\partial L}{\partial \eta_\lambda} = Q_\lambda, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_s} - \frac{\partial L}{\partial \xi_s} = Q_s$$

Предположение 2: $Q_s \equiv 0$. Тогда налицо циклические интегралы $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_s} = \mathrm{c}_s$. Обратим внимание, что здесь написано не что иное, как преобразование Лежандра, затрагивающее лишь часть скоростей. Используем это и введем *функцию Рауса*:

$$R_c(\dot{x}, x, t) = (L - \sum c_s \dot{\xi}_s) \mid_{\dot{\xi} = u(c, x, \dot{x}, t)}$$

Аналогично переходу к каноническим импульсам (только некоторые знаки другие)

$$\dot{\xi}_s = -\frac{\partial R_c}{\partial c_s}, \quad \frac{\partial R_c}{\partial \eta_\lambda} = \frac{\partial L}{\partial \eta_\lambda}, \quad \frac{\partial R_c}{\partial \dot{\eta}_\lambda} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_\lambda}$$

Предположение 3: Q_λ не зависят от ξ. Оставшиеся уравнения Лагранжа преобразуются к

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R_c}{\partial \dot{\eta}_\lambda} - \frac{\partial R_c}{\partial \eta_\lambda} = Q_\lambda(c, \dot{x}, x, t)$$

Это и есть *приведенная система* по Раусу. Если $Q \equiv 0$, то требуется только наличие циклических координат.

41.. Приведенная система и ее фазовый портрет в случае только одной нециклической координаты. Использование интегралов в случае, когда их число равно числу степеней свободы (интегрирование "в квадратурах").

Общая идея решения уравнений Лагранжа состоит в том, чтобы найти нужное число первых интегралов: для n уравнений надо n первых интегралов. Пусть имеется натуральный лагранжиан

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j - V(q), \tag{158}$$

причем $\dfrac{\partial L}{\partial q_2} = 0, \ldots, \dfrac{\partial L}{\partial q_n} = 0$. Тогда есть $n-1$ циклический интеграл и интеграл энергии, то есть n первых интегралов. Введем обозначение $q_1 = \theta$, $q_2 = \xi_1$, $\ldots$, $q_n = \xi_{n-1}$. Лагранжиан примет вид:

$$L = \frac{1}{2}a(\theta)\dot{\theta}^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\gamma_i(\theta)\dot{\xi}_i\dot{\theta} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n-1} D_{ij}(\theta)\dot{\xi}_i\dot{\xi}_j - V(\theta), \quad A = \|a_{ij}\| = \begin{pmatrix} a & \gamma^* \\ \gamma & D \end{pmatrix}, \tag{159}$$

причем матрица D имеет ненулевой определитель.

Запишем интеграл Якоби; так как в натуральном лагранжиане кинетическая энергия представлена квадратичной формой от $\dot{q}$, то этот интеграл совпадает с полной энергией:

$$H = T + V = \frac{1}{2}a(\theta)\dot{\theta}^2 + (\gamma, \dot{\xi})\dot{\theta} + \frac{1}{2}(D\dot{\xi}, \dot{\xi}) + V \tag{160}$$

Выпишем циклические интегралы: $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_k} = \mathrm{c}_k$ матричном виде

$$D\dot{\xi} + \gamma\dot{\theta} = c. \iff \dot{\xi} = D^{-1}(C - \dot{\theta}\gamma) \tag{161}$$

Подставим $\dot{\xi}$ из (161) в (160) и приведем подобные члены:

$$H = \frac{1}{2}(a(\theta) - (\gamma(\theta), D^{-1}(\theta)\gamma(\theta)))\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(C(\theta), D^{-1}(\theta)C(\theta)) + V(\theta) = \frac{1}{2}\tilde{a}(\theta)\dot{\theta}^2 + V_c(\theta) = h, \tag{162}$$

где $V_c(\theta)$ — *приведенный потенциал.*

Отсюда обычным интегрированием системы с одной степенью свободы находим $\theta(t)$, а затем дополнительным интегрировнием $\xi(t)$.

Чтобы получить решение, нам надо было проделывать алгебраические действия, вычислять определенные интегралы и брать обратные функции. Решение с помощью этих операций и составляет ИНТЕГРИРОВАНИЕ В КВАДРАТУРАХ.

(#) Как линейные по скоростям члены лагранжиана сказываются на гамильтониане и функции Рауса?

Пусть $L = L_2 + L_1 + L_0 = \frac{1}{2}(A(q)\dot{q}, \dot{q}) + (a(q), \dot{q}) - V(q)$. Тогда $p = A\dot{q} + a$ и

$$H = \frac{1}{2}(A\dot{q}, \dot{q}) + V = \frac{1}{2}(A^{-1}(p - a), p - a) + V$$

Для нахождения функции Рауса можно записать:

$$L = \Lambda(\dot{\xi}, \dot{r}, r, t) = \frac{1}{2}(N\dot{\xi}, \dot{\xi}) + (n, \dot{\xi}) + \nu$$

Здесь n и ν зависят от переменных $r, \dot{r}$, но сейчас они — как параметры. В итоге

$$R_c = \nu - \frac{1}{2}\left(N^{-1}(c - n), c - n\right).$$

42.. Скобка Пуассона двух функций и ее свойства. Правило сложной производной. Теорема Якоби-Пуассона о первых интегралах.

Пусть есть две функции $F(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, \ldots)$ и $G(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, \ldots)$. Их скобкой Пуассона называется выражение (функция)

$$\{F, G\} = \sum_{j=1}^{n}(-\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_i}) = \sum_{j=1}^{n}\{F, G\}_i,$$

где p_i, q_i — пара *сопряженных* канонических переменных.

Полную производную фукнции $F(p,q,t)$ в силу уравнений Гамильтона, порожденных функцией $H(p,q,t)$, равна

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F,H\}$$

уравнения Гамильтона можно переписать в виде

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\}, \quad \dot{q}_i = \{q_i, H\}.$$

Свойства скобок Пуассона:

$A_1)$ $\{F,G\} = -\{G,F\}$ - кососимметричность;

$A_2)$ $\{\alpha F_1 + \beta F_2, G\} = \alpha\{F_1,G\} + \beta\{F_2,G\}$ - линейность;

$A_3)$ $\{F,\{G,H\}\} + \{G,\{H,F\}\} + \{H,\{F,G\}\} \equiv 0$ - тождество Пуассона-Якоби;

$A_4)$ Если α - параметр в выражении F и G , то: $\frac{\partial}{\partial\alpha}\{F,G\} = \{\frac{\partial F}{\partial\alpha}, G\} + \{F, \frac{\partial G}{\partial\alpha}\}$;

Теорема Пуассона. Если F и G - первые интегралы уравнений Гамильтона, то их скобка $\{F,G\}$ — тоже первый интеграл.

Координатные (базисные) скобки:

$$\{p_k, p_l\} = 0, \{q_k, q_l\} = 0, \quad \{p_k, q_l\} = -\delta_{kl} = -\{q_l, p_k\} :$$

Попарные скобки канонических координат равны нулю, кроме $\{p_k, q_k\} = -1$, $\{q_k, p_k\} = 1$.

ПРАВИЛО СЛОЖНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ: пусть $F = \Phi(f_1(p,q), f_2(p,q), \ldots, f_n(p,q))$; тогда

$$\{F,G\} = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial\Phi}{\partial f_\mu}\{f_\mu G\}.$$

что по форме напоминает $F' = \sum \frac{\partial\Phi}{\partial f_\mu} f'_\mu$.

Следствие (правило Лейбница): $\{F_1F_2, G\} = \{F_1,G\}F_2 + F_1\{F_2,G\}$.

43.. Канонические преобразования (не зависящие от времени). Сохранение канонической формы уравнений при канонических преобразованиях.

Рассматриваем преобразование координат $p,q \to P,Q$ вида

$$p = p^*(P,Q), q = q^*(P,Q) \quad \Longleftrightarrow \quad P = P^*(p,q), Q = Q^*(p,q).$$

Определение 1. Эта замена переменных называется *канонической* тогда и только тогда, когда уравнения Гамильтона с любой $H(p,q)$ преобразуются в уравнения Гамильтона, порожденные функцией $H^*(P,Q) = H(p^*(P,Q), q^*(P,Q))$.

44.. Критерии каноничности замены переменных (сохранение скобки Пуассона; симплектичность матрицы Якоби, сохранение симплектической структуры, интеграл по контуру).

Речь идет о равносильных определения канонического преобразрвания.

Определение 2. Замена переменных называется канонической тогда и только тогда, когда для любых пар функций $\{F^*, G^*\}_{P,Q} = \{F,G\}^*$. Равносильность следует из $\dot{p} = \{p,H\}, \dot{q} = \{q,H\}$.

Симплектическая единица. Введем в рассмотрение специальную матрицу порядка 2n

$$I_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & -E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}$$

где E_n – единичная матрица n-ого порядка. Имеем $I^2 = -E_{2n}$. Положим

$$(z_1, ..., z_n, z_{n+1}, ..., z_{2n}) = (p_1, ..., p_n, q_1, ..., q_n).$$

Базисные скобки: $\|\{z_\alpha, z_\beta\}\| = I$. Скобки Пуассона

$$\{F, G\} = \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^T I \frac{\partial G}{\partial z} = \sum \frac{\partial F}{\partial z_\alpha}\{z_\alpha, z_\beta\}\frac{\partial G}{\partial z_\beta}$$

Система уравнений Гамильтона $\dot{z} = I\frac{\partial H}{\partial z}$.

Определение 3. Замена переменных называется канонической тогда и только тогда, когда $\|\{z_\alpha, z_\beta\}_{P,Q}\| = I$.

Матрица Якоби подстановки $z = z^*(Z)$ есть $\Delta = \|\Delta_{\alpha,\beta}\| = \|\frac{\partial z_\alpha}{\partial Z_\beta}\|$.

Определение 4. Замена переменных называется канонической тогда и только тогда, когда матрица Якоби Δ является симплектической, т.е.

$$\Delta I \Delta^T \equiv I$$

Лемма: если S является симплектической, то S^T тоже симплектическая:

$$SIS^T = I \;\Rightarrow\; (S^T)^{-1}I^{-1}S^{-1} = I^{-1} \;\Rightarrow S^T I S = I \;\; (\text{ибо } I^{-1} = -I)$$

Определение 5. Рассмотрим форму $dp_i \wedge dq_i$ (*симплектическая структура*). Замена переменных называется канонической тогда и только тогда, когда

$$\sum dp_i \wedge dq_i = \sum dP_j^* \wedge dQ_j^*$$

Определение 6. Замена переменных называется канонической тогда и только тогда, когда

$$d(\sum p_i dq_i - \sum P_i dQ_i) = 0.$$

Это равносильно тому, что существует функция $\Pi(P, Q)$ такая, что

$$\sum p_i^* dq_i^* - \sum P_i dQ_i = d\Pi(P, Q)$$

Она называется *первообразной* для канонического преобразования (термин авторский).

Определение 7. Замена переменных называется канонической тогда и только тогда, когда интеграл по любому замкнутому контуру стягиваемому в точку,

$$\oint pdq = \oint PdQ.$$

45.. Первообразная и производящая функция канонического преобразования.

Тождество $pdq - P^*dQ^* = d\Pi(p, q)$ можно переписать в любых переменных. Допустим, что в выражениях

(163) $$P = P^*(p, q)$$

имеем $\det \dfrac{\partial P^*}{\partial p} \neq 0$, тогда из (177) можно выразить $p = \bar{p}(P,q)$ и подставить в $Q = Q^*(p,q)$, получим $Q = \bar{Q}(P,q) = Q^*(\bar{p}(P,q),q)$. В итоге возникают смешанные формулы замены переменных

$$\begin{cases} p = \bar{p}(P,q) \\ Q = \bar{Q}(P,q) \end{cases}$$

Но $\sum p_i dq_i - \sum P_i dQ_i = d\Pi$ влечет $\sum p_i dq_i + \sum Q_i dP_i = d\Pi + d(\sum P_i Q_i)$, так что в переменных P, q видим $\sum p_i dq_i + \sum Q_i dP_i = dS(P,q)$, что дает

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \qquad Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}.$$

Смешанные формулы замены порождаются *производящей* функцией S(P,q). Требование

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial P \partial q} \neq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad det \frac{\partial P^*}{\partial q} \neq 0$$

Для тождественного преобразования $S = \sum P_i q_i$.

46.. Уравнение Гамильтона-Якоби для производящей функции канонической замены переменных.

Пусть нам известны выражения H в различных локальных координатах: $H = H'(p,q)$, $H = H''(P,Q)$. Применяя смешанные формулы замены, имеем $H'(\bar{p}(P,q),q) = H''(P,Q(P,q))$ или, используя производящую функцию,

$$H'\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q\right) = H''\left(P, \frac{\partial S}{\partial P}\right).$$

Таким образом, $S(P,q)$ удовлетворяет некоторому уравнению в частных производных, которое называется *уравнением Гамильтона–Якоби*.

47.. Канонические полярные координаты. Интегрирование гармонического осциллятора методом Гамильтона-Якоби.

Канонические полярные координаты:

$$p = \sqrt{2p}\cos Q, q = \sqrt{2p}\sin Q \quad \Longleftrightarrow \quad P = \frac{p^2+q^2}{2}, q = \sqrt{2p}\sin Q$$

$$pdq - PdQ = d(P\sin Q\cos Q) \quad \Rightarrow \quad S(P,q) = [\text{упражнение}]$$

О гармоническом осцилляторе.

Не уменьшая общности, $H = \frac{p^2}{2} + \omega^2\frac{q^2}{2}$, где $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega$ — частота колебаний. Уравнение Гамильтона-Якоби

$$\frac{1}{2}(\frac{\partial S}{\partial q})^2 + \frac{\omega^2}{2}q^2 = H^*(P) \;\Rightarrow\; \frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{2H^*(P) - \omega^2 q^2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \int\limits_0^q \sqrt{2H^*(P) - \omega^2 q^2}dq \;\Rightarrow\; \begin{cases} p = \dfrac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{2H^* - \omega^2 q^2} \\ Q = \dfrac{\partial S}{\partial P} = \int\limits_0^q \frac{\frac{dH^*(P)}{dP}}{\sqrt{2H^* - \omega^2 q^2}}dq = \frac{dH^*(P)}{dP}\frac{1}{\omega}\int\limits_0^q \frac{dq}{\sqrt{\frac{2H^*(P)}{\omega^2} - q^2}} \end{cases}$$

Следовательно,

$$Q = \frac{dH^*}{dP}\frac{1}{\omega}\arcsin\frac{q}{\sqrt{\frac{2H^*}{\omega^2}}} \tag{164}$$

Положим $H^* = \omega P$ (т.к. H^* можно выбирать). Итог:

$$\begin{cases} P = \frac{1}{2\omega}(p^2 + \omega^2 q^2) \\ Q = \arcsin \frac{q}{\frac{1}{\omega}\sqrt{p^2+\omega^2 q^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = \sqrt{2P\omega}\cos Q \\ q = \sqrt{\frac{2P}{\omega}}\sin Q \end{cases}$$

Итак, $P, Q \mod 2\pi$ — переменные "действие-угол"для гармонического осцилятора: $\dot{P} = 0$, $\dot{Q} = \omega$. Здесь озникает обобщение канонических полярных координат.

48.. Тонкости решения уравнения Гамильтона-Якоби в случае одной степени свободы.

$$H = \frac{p^2}{2a(q)} + V(q) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2a(q)}(\frac{\partial S}{\partial q})^2 + V(q) = H^*(P) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad S = \int\limits_{q_1(P)}^{q} \sqrt{2a(q)(H^*(P) - V(q))}dq$$

Выражение под корнем будет $\geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $q \in \mathcal{M}^{\mathcal{H}^*(\mathcal{P})}$ — это область возможности движения с энергией $H^*(P)$.

Стандартно имеем

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{2a(q)(H^*(P) - V(q))}$$

Для определения Q вспомним, что

$$\frac{d}{d\upsilon}\int\limits_{\alpha(\upsilon)}^{\beta(\upsilon)} f(x,\upsilon)dx = \int\limits_{\alpha(\upsilon)}^{\beta(\upsilon)} \frac{\partial f}{\partial \upsilon}dx + f(\beta(\upsilon),\upsilon)\frac{d\beta}{d\upsilon} - f(\alpha(\upsilon),\upsilon)\frac{d\alpha}{d\upsilon}$$

Поэтому в принципе мы должны получить

$$Q = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{dH^*}{dP}\int\limits_{q_1(P)}^{q} \frac{a(q)dq}{\sqrt{2a(q)(H^*(P) - V(q))}} - \sqrt{2a(q_1(P))(H^*(P) - V(q_1(P)))}\frac{dq_1}{dP}$$

Второе слагаемое нам не нужно, поэтому либо **??** $\frac{dq_1}{dP} = 0$ — удобнее всего в качестве q_1 взять точку минимума потенциала — или (2) $\sqrt{2a(q_1)(H^*(P) - V(q_1(P)))} = 0$, то есть $q_1(P)$ является границей области возможности движения $\mathcal{M}^{\mathcal{H}^*(\mathcal{P})}$.

49.. Отделение переменных.

Пусть гамильтониан можно представить в виде

$$H = \Phi(f(p_1,\ldots,p_m,q_1,\ldots,q_m),p_{m+1},\ldots,p_n,q_{m+1},\ldots,q_n)$$

или

$$H = \Phi(f(\tilde{p},\tilde{q}),\bar{p},\bar{q}).$$

Будем искать S в виде $S(\tilde{p},\bar{p},\tilde{q},\bar{q}) = \tilde{S}(\ldots,\tilde{q}) + \bar{S}(\ldots,\bar{q})$. Подставим S в выражение для H :

$$\Phi(f(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{q}},\tilde{p}),\frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{q}},\bar{q}) = H^*(\tilde{P},\bar{P}) \tag{165}$$

Захотим, чтобы было $f(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{q}}, \tilde{p}) = f^*(\tilde{P})$. Тогда $\tilde{S} = \tilde{S}(\tilde{P}, \tilde{q})$. С учетом этих выражений перепишем выражение (165):

$$\Phi(f^*(\tilde{P}), \frac{\partial \bar{S}}{\partial \bar{q}}, \bar{q}) = H^*(\tilde{P}, \bar{P}) \Rightarrow \bar{S} = \bar{S}(\tilde{P}, \bar{P}, \bar{q})$$

Говорят, что переменные q и $\bar{q}$ разделились при решении уравнения Гамильтона-Якоби.

50.. Сложное разделение переменных. Понятие о переменных действие-угол.

Сложное разделение переменных констатируем, когда

$$H = \frac{F_1(p_1, q_1) + \ldots + F_n(p_n, q_n)}{f_1(p_1, q_1) + \ldots + f_n(p_n, q_n)} = H^*(P)$$

Подставляем $\frac{\partial S}{\partial q_i}$ вместо p_i и перепишем уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\sum_i (F_i(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i) - H^*(P) f_i(\frac{\partial S}{\partial q_i}, q_i)) = 0 \tag{166}$$

Захотим, чтобы S можно было представить в виде $S = \sum_i S_i(P, q_i)$. Тогда (166) примет вид:

$$\begin{cases} F_1(\frac{\partial S_1}{\partial q_1}, q_1) - H^*(P) f_1(\frac{\partial S_1}{\partial q_1}, q_1) = \varphi_1(P) \\ \ldots \\ F_n(\frac{\partial S_n}{\partial q_n}, q_n) - H^*(P) f_n(\frac{\partial S_n}{\partial q_n}, q_n) = \varphi_n(P) \\ \\ \sum_i \varphi_i(P) = 0 \end{cases}$$

Часто пишут $\varphi_i = P_i$ при $i \geqslant 2$, $H = P_1$. Тогда $S_i = S_i(P_1, P_i, q_i), i \geqslant 2$. Однако на таком пути не получить такие (Q, Q), что не только $H^*(P)$, но и $Q \mod 2\pi$, то есть не придти к *переменным «действие-угол»*.

51.. Интегралы в инволюции и системы уравнений Гамильтона-Якоби.

Пусть задана система уравнений Гамильтона и ее первые интегралы $F_1(p, q), \ldots, F_m(p, q)$. Они называются интегралами в инволюции, если $\{F_i, F_j\} = 0$. Например, если возьмем канонические импульсы $P_1, \ldots, P_n$, то $\{P_i, P_j\} = 0$.

В идеале $m = n$. Захотим, чтобы в новых переменных было $F_1(p, q) = P_1, \ldots, F_n(p, q) = P_n$. Тогда получим систему уравнений $F_i(\frac{\partial S}{\partial q}, q) = P_i$ для $S(P, q)$. Отсюда можно выразить $\frac{\partial S}{\partial q} = \Psi_i(P, q)$ и искать S.

Это только общая идея. Доказательство того, что этот путь действительно ведет к результату, см. в [1]. Это вне программы.

52.. Сведение неавтономной гамильтоновой системы к автономной.

Пусть задан гамильтониан $H(p, q, t)$. Захотим, чтобы было $t = q_{n+1}$, и возьмем $\mathcal{H} = p_{n+1} + H(p, q, q_{n+1})$. Напишем уравнения с гамильтонианом $\mathcal{H}$:

$$\begin{cases} \frac{dq_{n+1}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{n+1}} = 1 \\ \frac{dp_{n+1}}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_{n+1}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \ldots \\ \frac{dp_n}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_n} \\ \frac{dq_n}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_n} \end{cases}$$

На всех уровнях $\mathcal{H} = \mathrm{const}$ движения одинаковые. Поэтому можно зафиксировать, например, уровень $\mathcal{H} = 0$.

53.. Уравнения Уиттекера.

У автономной гамильтоновой системы зафикирован уровень энергии $H(p,q) = h_0$. Пусть $\dfrac{\partial H}{\partial p_n} \neq 0$ (локально). Тогда по теореме о неявной функции $p_n = -K(p_1, \ldots, p_{n-1}, q_1, \ldots, q_n, h_0)$, а переменная q_n может быть использована в качестве новой независимой, так как $\frac{dq_n}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_n} \neq 0$. Обозначим $\tau = q_n$. Тогда

$$\frac{dq_i}{d\tau} = \frac{dq_i}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_i}\Big/\frac{\partial H}{\partial p_n} = \frac{\partial K}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{\partial K}{\partial q_i}$$

54.. Замены времени в гамильтоновых системах.

ЗАМЕНЫ ВРЕМЕНИ. Пусть есть система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = X(x). \tag{167}$$

Положим формально $d\tau = \Pi(x)\,dt$, тогда

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{\Pi(x)}\,X(x). \tag{168}$$

Содержание перехода от системы (167) к системе (168) состоит в следующем. Пусть $\bar{x} = x(t, x_0)$ — общее решение системы (167) и задана функция $\Pi(x)$, сохраняющая знак в этой области. Вдоль каждого решения можно вычислить функцию:

$$\tau = \tau^*(t, x_0) = \int\limits_0^t \Pi(x(t, x_0))\,dt,$$

которая монотонна на всем интервале определения решения и потому имеет обратную: $t = t_*(\tau, x_0)$. Подставим последнюю зависимость в общее решение; тогда

$$x = \bar{\bar{x}}(\tau, x_0) = \bar{x}(t_*(\tau, x_0), x_0)$$

есть общее решение системы (168). Действительно

$$\frac{d\bar{\bar{x}}}{d\tau} = \frac{d\bar{x}}{dt}\frac{dt_*}{d\tau} = X(\bar{\bar{x}}(\tau, x_0)) \cdot \frac{1}{\Pi(\bar{\bar{x}}(\tau, x_0))}.$$

ГАМИЛЬТОНОВ СЛУЧАЙ. В случае системы в канонической форме

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{169}$$

после замены $d\tau = \Pi(p,q)\,dt$ получим

$$\frac{dp}{d\tau} = -\frac{1}{\Pi}\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{dq}{d\tau} = \frac{1}{\Pi}\frac{\partial H}{\partial p}. \tag{170}$$

Вообще говоря, правые части не обязаны быть частными производными по q, p некоторой функции $F(p,q)$, так что уравнения (170) не будут каноническими.

УРОВЕНЬ ПРИТЯЗАНИЙ. Если мы все же хотим остаться в рамках гамильтонова формализма, то придется ограничиться решениями, лежащими на одном фиксированном (хотя и произвольно фиксированном) уровне энергии $H(p,q) = h$. Введем функцию

$$F(p,q) = \frac{1}{\Pi}\,(H - h), \tag{171}$$

и рассмотрим систему с гамильтонианом $F(p,q)$:

$$\frac{dp}{d\tau} = -\frac{\partial F}{\partial q} = -\frac{1}{\Pi}\frac{\partial H}{\partial q} - (H-h)\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{\Pi}\right), \frac{dq}{d\tau} = \dots \tag{172}$$

Видим, что во всех точках уровня $H = h$ система (172) совпадает с системой (170). Для системы (172) это уровень $F = 0$.

Короче говоря, *замену времени в гамильтоновой системе можно сделать только на уровне энергии.* [Кстати, сложное разделение переменных таким путем сводится к простому.]

55.. Задание уровня энергии однозначно определяет траектории гамильтоновой системы.

Пусть $\{H(p,q) = h_0\}$ - невырожденный уровень энергии, то есть в каждой точке его $dH \neq 0$, или, что то же самое одна из частных производных $\neq 0$.

Следовательно, это $(2n-1)-$ мерное гладкое подмногообразие в фазовом пространстве.

Лемма. Допустим, что невырожденные уровни двух гамильтонианов совпадают:

$$\{H(p,q) = h_0\} = \{G(p,q) = g_0\}.$$

Существует функция $F(p,q) \neq 0$ такая, что $[G(p,q) - g_0] = F(p,q)[H(p,q) - h_0]$.

Для простоты $h_0 = g_0 = 0$. Пусть $\frac{\partial H}{\partial p_1} \neq 0$ для определенности. Тогда в качестве координат в пространстве можно взять

$$\eta = H(p,q), p_2, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$$

Теперь $G = G^*(\eta, p_2, \dots, q_n)$ и для любых $p_2, \dots, q_n$ имеем $G(0, \dots) = 0$. Следовательно,

$$G^* = \eta F(\eta, p_2, \dots, q_n),$$

что и требовалось.

Теперь начнем выписывать уравнения Гамильтона в точках расматриваемого общего уровня $H = 0$:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial G}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i}F + H\frac{\partial F}{\partial p_i} = F\frac{\partial H}{\partial p_i}$$

Если ввести новое время $d\tau = Fdt$, то и получим, что решения уравнений Гамильтона, порожденные G, превратятся в решения уравнений Гамильтона, порожденные H.

56.. Преобразование функции Гамильтона при канонической замене переменных, зависящей от времени.

Определение. Преобразование, зависящее от времени, называется каноническим, если оно каноническое для любого значения t. Смешанные формулы замены переменных для неавтономного преобразования имеют вид

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \qquad Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}, \quad S = S(P,q,t), \quad \det\frac{\partial^2 S}{\partial P \partial q} \neq 0$$

Если система Гамильтона неавтономна, то при неавтономной канонической замене гамильтониан меняется. Чтобы это уяснить, перейдем к автономной системе более высокого порядка. Пусть $W(P_1, \dots, P_n, P_{n+1}, q_1, \dots, q_n, q_{n+1})$ — производящая функция некоторого канонического преобразования. Уравнение Гамильтона-Якоби для этой функции запишется в виде

$$\frac{\partial W}{\partial q_{n+1}} + H(\frac{\partial W}{\partial q}, q, q_{n+1}) = \mathcal{H}^*(P_1, \dots, P_n, P_{n+1}, \frac{\partial W}{\partial P}) \tag{173}$$

где $\mathcal{H}^*(P_1,\ldots,P_n,P_{n+1},Q_1,\ldots,Q_n,Q_{n+1})$ — новый гамильтониан.

Будем брать производящие функции только специального вида:

$$W = P_{n+1}q_{n+1} + S(P_1,\ldots,P_n,q_1,\ldots,q_n,q_{n+1}).$$

Новый гамильтониан тоже: $\mathcal{H}^* = P_{n+1} + \ldots$. Получим, что (173) перепишется в виде

$$P_{n+1} + \frac{\partial S}{\partial q_{n+1}} + H(\frac{\partial S}{\partial q}, q, q_{n+1}) = P_{n+1} + K(P_1,\ldots,P_n,\frac{\partial S}{\partial P}, q_{n+1})$$

Вспомнив, что $t = q_{n+1}$, пишем

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t) = K(P, \frac{\partial S}{\partial P}, t),$$

где K — новый гамильтониан.

За условием невырожденности для W и S проследите самостоятельно.

57.. Классическое уравнение Гамильтона-Якоби и теорема Якоби о полном интеграле.

Обычно хотят, чтобы новый гамильтонан $K \equiv 0$. Тогда получим классическое уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(\frac{\partial S}{\partial q}, q, t) = 0. \tag{174}$$

Теорема Якоби. Пусть есть полный интеграл (174), то есть семейство решений $S(q,\alpha,t)$, такое что

$$det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial p_i \partial \alpha_j} \right\| \neq 0.$$

Тогда из соотношений

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}\ , \qquad \beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha}$$

получается общее решение $p(\alpha,\beta,t), q(\alpha,\beta,t)$ уравнений Гамильтона, где α,β имеют смысл постоянных.

58.. "Сверхлагранжиан".

Введем расширенное фазовое пространство и функцию

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot{p},\dot{q},p,q,t) = \sum p_i\dot{q}_i - H(p,q,t).$$

Это *«сверхлагранжиан»,* который на самом деле от $\dot{p}$ не зависит. Если написать для него уравнения Лагранжа, то получатся уравнения Гамильтона.

59.. Трубки тока в расширенном фазовом пространстве. Интегральный инвариант Пуанкаре-Картана.

Займемся невырожденным однопараметрическим семейством решений $z(s,t)$; при каждом s имеем решение. Более того, пусть зависимость от s периодическая:

$$z(l,t) \equiv z(0,t),$$

где $l > 0$ и минимальное с таким свойством. Тогда получается *трубка тока*. Пусть замкнутые контуры C_1, C_2 *охватывают* трубку тока. В проекции на $\mathbb{R}^n(p,q)$ получаются замкнутые кривые $A(s)$, $B(s)$. Для этого достаточно задать
(1) $t_1(s)$, $t_1(l) = t_1(0)$, тогда $A(s) = z(s, t_1(s))$; (2) $t_2(s)$, $t_2(l) = t_1(0)$, тогда $B(s) = z(s, t_2(s))$.

Цепочка ассоциаций:

$$L \longrightarrow \sum p_i \dot{q}_i - H \longrightarrow \mathcal{L} = \sum p_i \dot{q}_i - H(p,q,t) \longrightarrow \sum p_i dq_i - dH \longrightarrow \mathcal{L}dt,$$

где $\omega \sum p_i dq_i - dH$ есть дифференциальная форма в $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Теорема.

$$\oint\limits_{A(s),\ t_1(s)} \sum p_i dq_i - dH = \oint\limits_{B(s),\ t_2(s)} \sum p_i dq_i - dH.$$

Иными словами, интеграл $\oint \sum p_i dq_i - dH$ по любому контуру, охватывающему трубку тока, один и тот же (для данной трубки). Он является *интегральным инвариантом* Пуанкаре – Картана. Охватывание происходит один раз.

Для каждой кривой на трубке тока вычислим интеграл

$$I(s) = \int\limits_{t_1(s)}^{t_2(s)} \mathcal{L}dt = \int\limits_{t_1(s)}^{t_2(s)} (\sum p_i \dot{q}_i - H)dt = \int\limits_{t_1(s)}^{t_2(s)} \sum \left[p_i(s,t) \frac{\partial q_i}{\partial t} - H(z(s,t),t) \right] dt$$

Продифференцируем его:

$$\frac{dI}{ds} = \int\limits_{t_1(s)}^{t_2(s)} \left[\sum \frac{\partial p_i}{\partial s} \dot{q}_i + \sum p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial s} - \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial s} - \sum \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial s} \right] dt + \mathcal{L}_2 \frac{dt_2}{ds} - \mathcal{L}_1 \frac{dt_1}{ds} =$$

$$= \int\limits_{t_1(s)}^{t_2(s)} \left[\sum p_i \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial s} + \sum \dot{p}_i \frac{\partial q_i}{\partial s} \right] dt + \mathcal{L}_2 \frac{dt_2}{ds} - \mathcal{L}_1 \frac{dt_1}{ds} = \int\limits_{t_1(s)}^{t_2(s)} \left[\frac{d}{dt} \sum p_i \frac{\partial q_i}{\partial s} \right] dt \frac{\partial q_i}{\partial s} dt + \mathcal{L}_2 \frac{dt_2}{ds} - \mathcal{L}_1 \frac{dt_1}{ds} =$$

$$= \sum \dot{p}_i \frac{\partial q_i}{\partial s} \Bigg|_{t_1}^{t_2} + \left[\sum p_i(s,t_2) \frac{\partial q_i}{\partial t} - H(z(s,t_2),t_2) \right] \frac{dt_2}{ds} - \left[\sum p_i(s,t_1) \frac{\partial q_i}{\partial t}(s,t_1) - H(z(s,t_1),t_1) \right] \frac{dt_1}{ds} =$$

$$= \sum p_i(s,t_2(s)) \left[\frac{\partial q_i}{\partial s} + \frac{\partial q_i}{\partial t}(s,t_2(s)) \frac{dt_2}{ds} \right] - H(z(s,t_2(s)),t_2(s)) \frac{dt_2}{ds} - (\text{то же самое с } t_1(s))$$

Но

$$\frac{\partial q_i}{\partial s} + \frac{\partial q_i}{\partial t}(s,t_2(s)) \frac{dt_2}{ds} \equiv \frac{d}{ds} q_i(s,t_2(s)) \quad \text{и то же самое с } t_1(s).$$

Осталось написать

$$0 = I(l) - I(0) = \int\limits_0^l \frac{dI}{ds} ds = \oint\limits_{C_2} \omega - \oint\limits_{C_1} \omega$$

60.. Каноничность фазового потока.

Пусть при $t = t_0$ заданы произвольные начальные условия $p(t)|_{t=t_0} = p_0$ и $q(t)|_{t=t_0} = q_0$. Для выразительности положим $p_0 = \alpha$, $q_0 = \beta$. Тогда формулы общего решения уравнений Гамильтона $p = p(\alpha, \beta, t), q = q(\alpha, \beta, t)$ задают отображение, которое будет каноническим в любой момент времени.

В плоскости $t = t_0$ берем произвольный замкнутый контур $C_0 = (\alpha(s), \beta(s), t_0)$. Этот контур с течением времени заметает некую трубку тока. В произвольный момент времени $t = t_1$ получаем контур $C_1(s) = p(\alpha(s), \beta(s), t_1)$. По теореме об интегральном инварианте Пуанкаре-Картана имеем

$$\oint\limits_{C_0} pdq - Hdt = \oint\limits_{C_1} pdq - Hdt.$$

Но $dt = 0$ на контурах C_0 и C_1. Отсюда имеем

$$\oint\limits_{C_0} p\delta q = \oint\limits_{C_1} p\delta q$$

Налицо каноничность преобразования по определению 7.

61.. Принцип Гамильтона: решения уравнений Лагранжа как экстремали функционала действия.

Пусть $q(t)$ - кривая в пространстве положений, $t \in [t_\alpha, t_\beta]$

$$q(t_\alpha) = (a_1, ..., a_n) = a, \quad q(t_\beta) = (b_1, ..., b_n) = b$$

Действие — это величина $I[q(t)] = \int\limits_{t_\alpha}^{t_\beta} L(\dot{q}(t), q(t), t)dt.$

Пусть есть *вариация* данной кривой: это любое семейство кривых $q(\varepsilon, t) = q_\varepsilon(t)$, определенных на $[t_\alpha(\varepsilon), t_\beta(\varepsilon)]$, причем при $\varepsilon = 0$ получается данная кривая: $t_\alpha(0) = t_\alpha, t_\beta(0) = t_\beta$, $q(0, t) = q(t)$.

Подставляем вариацию в определенное нами действие и получаем функцию:

$$I[\varepsilon] = \int\limits_{t_\alpha(\varepsilon)}^{t_\beta(\varepsilon)} L(\dot{q_\varepsilon}(t), q_\varepsilon(t), t)dt \ ,$$

которую мы захотим дифференцировать по ε, исследуя на экстремальность при $\varepsilon = 0$. У нас $\dfrac{d}{d\varepsilon}$ почти везде означает $\dfrac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}$:

$$\frac{d}{d\varepsilon}\int\limits_{t_\alpha(\varepsilon)}^{t_\beta(\varepsilon)} f(\varepsilon, t)dt = \int\limits_{t_\alpha}^{t_\beta} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}dt + f(0, t_\beta)\frac{dt_\beta}{d\varepsilon} - f(0, t_\alpha)\frac{dt_\alpha}{d\varepsilon},$$

Последние два слагаемых нам неудобны, так что всюду ниже t_α, t_β считаются неизменными. Тогда

$$\frac{d}{d\varepsilon} = \int\limits_{t_\alpha}^{t_\beta} F(q_\varepsilon(t), t)dt = \int\limits_{t_\alpha}^{t_\beta} \sum \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial \varepsilon}dt = \int\limits_{t_\alpha}^{t_\beta} \sum \frac{\partial F}{\partial q_i}|_{q(t)} h_i(t)dt$$

где подразумевается, что $q_\varepsilon = q(t) + \varepsilon h(t) + O(\varepsilon^2)$. Применим это к действию:

$$\frac{dI_\varepsilon}{d\varepsilon}\frac{d}{d\varepsilon}\int\limits_{t_\alpha}^{t_\beta} L(\dot{q_\varepsilon}(t), q_\varepsilon(t), t)dt = \int\limits_{t_\alpha}^{t_\beta} \left[\frac{d}{dt}[\sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}h_i(t)] - \sum(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i})h_i(t)\right] dt + \sum \frac{\partial L}{\partial q_i}|_{q(t)} h_i(t)dt$$

$$\frac{dI_\varepsilon}{d\varepsilon} = \int\limits_{t_\alpha}^{t_\beta} (\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) h_i dt + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} h_i \Big|_{t_\alpha}^{t_\beta}$$

Нам потребуется дополнительное предположение $q_\varepsilon(t_\alpha) \equiv a, q_\varepsilon(t_\beta) \equiv b$(концы закреплены), таким образом, $h_i(t_\alpha) = h_i(t_\beta) = 0$.

Теорема (принцип Гамильтона).

Кривая $q(t)$ является экстремалью для функционала действия при закрепленных концах тогда и только тогда, когда она удовлетворяет уравнениям Лагранжа.

Доказательство:

Предположим, что $q(t)$ удовлетворяет уравнениям Лагранжа, то есть функции

$$\lambda_i = \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\Big|_{\text{вдоль } q_i(t)} \equiv 0 \tag{175}$$

Тогда, если умножить (175) на функции h_i, а затем взять интеграл от полученного выражения, то, очевидно, он тоже будет равен нулю. В одну сторону теорема доказана.

Докажем в обратную сторону: предположим, что $q(t)$ является экстремалью нашего функционала, но уравнения Лагранжа не выполняются: и из того, что уравнения Лагранжа не удовлетворяются, $\Lambda_i(t) \neq 0$ где-то на рассматриваемом интервале времени.

Положим $h_i(t) = (t_\alpha - t)\,(t - t_\beta)\,\Lambda_i(t)$ (на концах - значения, равны нулю). Тогда получается противоречие:

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int\limits_{t_\alpha}^{t_\beta} \sum {\lambda_i}^2(t) \cdot (t_\alpha - t)\,(t - t_\beta)\,dt > 0$$

62.. Принцип Гамильтона в форме Пуанкаре.

Рассмотрим расширенное фазовое пространство (p, q, t) размерности $2n+1$, в котором координатами будут p, q, $(i = 1, \cdots, n)$ и t. Аналогично предыдущему параграфу, введем функционал, который запишем в следующем виде:

$$I[p(t), q(t)] = \int\limits_{t_\alpha}^{t_\beta} \mathcal{L}\,dt = \int\limits_{t_\alpha}^{t_\beta} \left[\sum_i p_i\,\dot{q}_i - H(p, q, t)\right] dt \tag{176}$$

Рассмотрим вариацию

$$p_\varepsilon = p(t) + \varepsilon g(t), \quad q_\varepsilon = q(t) + \varepsilon h(t)$$

Так как (по определению "сверхлагранжиана") $\dfrac{\partial L^*}{\partial \dot{p}_i} = 0$, то нам уже не нужно требовать, чтобы $g(t_\alpha) = g(t_\beta) = 0$. В результате по переменной p концы не закреплены, а по q — закреплены, то у нас вариации *с частично закрепленными концами.*

Итоговая формулировка: кривая $p(t), q(t)$ является экстремалью для функционала действия при концах, закрепленных только по q, тогда и только тогда, когда она удовлетворяет уравнениям Гамильтона.

63.. Принцип наименьшего действия в форме Якоби: траектории натуральной системы с заданной энергией как геодезические метрики Якоби.

Пусть имеем автономную натуральную лагранжеву систему. Тогда $H = T + V = h$ — первый интеграл. Если мы хотим, чтобы $q(t)$ было решением уравнений Лагранжа, мы обязаны требовать $H(\dot{q}(t), q(t)) = h \Longrightarrow V(q(t)) \leqslant h$.

Зафиксируем h. Мы уменьшили класс кривых, которые можно рассматривать. Но искомые решения лежат среди них. Имеем:

$$\frac{d}{dt}I(\varepsilon)=0 \Longleftrightarrow \frac{d}{d\varepsilon}\int\limits_{t_A}^{t_B}(T-V+h)dt=0 \Longleftrightarrow \frac{d}{d\varepsilon}\int\limits_{t_A}^{t_B}2Tdt=0$$

Будем брать $V(q(t))<h$. Тогда $T+V=h \Longrightarrow 2T=2(h-V)>0$. Поэтому условие $\frac{d}{dt}I(\varepsilon)|_{\varepsilon=0}=0$ эквивалентно

$$\frac{d}{d\varepsilon}\int\limits_{t_A}^{t_B}\sqrt{2(h-V(a))}\sqrt{2T}dt=\frac{d}{d\varepsilon}\int\limits_{a}^{b}\sqrt{2(h-V(a))}\sqrt{\sum a_{ij}d\dot{q}_i d\dot{q}_j}=0$$

Подынтегральное выражение обозначается ds и должно вызвать воспоминания из курса дифференциальной геометрии.

Принцип Якоби. Траектории движения с энергией h суть геодезические римановой метрики ds в области $\{V<h\}$.

Отметим, что значение функционала длины не зависит от параметризации кривой.

64.. Динамические системы с гладкой инвариантной мерой, теорема Лиувилля о сохранении фазового объема.

Для начала вспомним уравнение неразрывности $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho v=0$.

Пусть есть система дифференциальных уравнений: $\frac{dx_i}{dt}=F_i(x)$. Может оказаться так, что существует функция $\mu(x)>0$ (плотность) такая, что для любого области V ее объем не изменяется при увлечении ее фазовым потоком:

$$\int\limits_V \mu dx_1 dx_2..dx_n=\int\limits_{g^tV}\mu dx_1..dx_n$$

где g^t — однопараметрическая группа сдвигов вдоль векторного поля $\bar{F}$.

Тогда говорят, что *система обладает инвариантной мерой с плотностью* μ. Условие существования меры :

$$\operatorname{div}\mu\overrightarrow{F}=\sum\frac{\partial}{\partial x_i}(\mu F_i)=0 \iff \sum\frac{\partial\mu}{\partial x_i}F_i+\mu\sum\frac{\partial F_i}{\partial x_i}=\frac{d\mu}{dt}+\mu\operatorname{div}\overrightarrow{F}=0$$

Функция μ, удовлетворяющая этому условию называется множителем Якоби.

Упражнение: если есть два множителя Якоби, то их отношение — первый интеграл.

Теорема Лиувилля. Уравнения Гамильтона обладают инвариантной мерой с множителем $\mu\equiv 1$.

65.. Теорема Пуанкаре о возвращении.

Пусть M — инвариантная относительно фазовго потока область, имеющая конечную меру, Пусть $x_0\in M$; Тогда $\forall\varepsilon>0$ $\forall T>0$ $\exists x_1$ и n такие, что $|x_1-x_0|<\varepsilon$ и $|g^{nT}x_1-x_0|<\varepsilon$ (T — время одного сдвига).

Доказательство. Пусть это не так для некоторых ε, T. Пусть $V_0=\{|x-x_0|<\varepsilon\}$, $V_n=g^{nT}V_0$. Если они все не пересекаются, то это противоречит конечности меры M. Значит, существует $y\in V_{m+k}\bigcap V_m$. Применим преобразование $g^{-mT}y$ к окрестностям V_{m+k} и V_m. Тогда они перейдут в окрестности V_k и V_0 соответственно, а y в точку $x_1\in V_k\bigcap V_0$ Что и требовалось доказать.

66.. Понятие устойчивости и асимптотической устойчивости по Ляпунову. Устойчивость линейных систем.

Всякие уравнения движения можно привести к виду

$$\dot{z} = Z(t,z), \qquad z \in \boldsymbol{R}^n; \qquad Z(t,z) \in C^{1,1} : I \times \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^n (I = [0,\infty)) \tag{177}$$

Обозначим через $z_0(t)$ решение задачи Коши для этой системы $z_0(t) = z_0(t, t_0, z_0), t \geqslant 0$.

Определение. Движение $z_0(t)$ называется устойчивым (по Ляпунову), если $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall t_0 \in I$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что $\forall z_* : ||z_* - z_0|| < \delta$ решение $z_*(t)$ с соответствующим начальным условием существует и $\forall t \in J \equiv [t_0, \infty)$ и при этом $||z_*(t) - z_0(t)|| < \varepsilon$. В противном случае решение называется неустойчивым. Движение $z_0(t)$ называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и $\lim_{t\to\infty} ||z_*(t) - z_0(t)|| = 0$.

Сделаем замену переменных $z = z_0(t) + x$ в (177). Получим *уравнение возмущенного движения*

$$\dot{x} = X(t,x), \quad X = Z(t, z_0(t) + x) - \dot{z}_0(t). \tag{178}$$

Очевидно $X(t,0) \equiv 0$; $X \in C^{1,1} : I \times S_\sigma \to R^n$, $S_\sigma = \{x : ||x|| < \sigma\}$, т.е. (178) допускает нулевое решение $x(t) \equiv 0$, т.н. *невозмущенное движение.*

Данные выше определения переносятся на невозмущенное движение.

Линейная система устойчива тогда только тогда, когда каждое ее решение ограничено.

67.. Элементы теории возмущений и теории устойчивости.

Для начала вспомним кое-что из предыдущего семестра.
Рассмотрим векторное дифференциальное уравнение (или, что то же самое, систему дифференциальных уравнений в пространстве $\mathsf{R}^n(x_1, \ldots, x_n)$:

$$\frac{dx}{dt} = F(x); \quad F(0) = 0 \tag{179}$$

Сделаем замену переменных с параметром (эта операция носит название "искусственное введение малого параметра"):

$$x = \varepsilon\xi$$

Тогда уравнение (179) перепишется следующим образом:

$$\frac{d\xi}{dt} = A\xi + \varepsilon(...) \ , \tag{180}$$

где $A = \frac{\partial F}{\partial x}|_{x=0}$. При стремлении ε к нулю в пределе получим систему первого приближения.

ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ имеет дело с системами, зависящими от параметра ε, точнее, с системами вида

$$\frac{dx}{dt} = F(x,t) + \varepsilon G(x,t,\varepsilon) \ , \tag{181}$$

где ε – МАЛЫЙ параметр, т.е. он изменяется в окрестности нуля.

Посмотрим, откуда могут возникать такие системы.

Рассмотрим простой пример: кирпич падает с девятого этажа. На него действует сила тяжести и сила сопротивления воздуха. Сила сопротивления мала по сравнению с силой тяжести, и почти всегда ей можно пренебрегать.

Или например, рассмотрим движение искусственного спутника Земли по орбите. Можно считать Землю шаром, но на самом деле она чуть сплюснута с полюсов. Искривление мало по сравнению с размерами

Земли. Но здесь уже пренебрегать этой малой величиной нельзя, так как она ощутимо влияет на движение спутника.

Вернемся к уравнению (181). Стоящее в правой части слагаемое $\varepsilon G(x,t,e)$ можно представить в виде ряда Телора по ε. По ε можно раскладывать и решение системы (181): $x^\varepsilon(t,t_0)$ [1)]

Будем считать, что $x^\varepsilon(t_0,t_0)=x_0$. Считаем, что начальные условия от ε не зависят, хотя в общем случае могут и зависеть.

При $\varepsilon=0$ получим

$$\frac{d}{dt}x^0(t)=F(x^0(t),t) \tag{182}$$

При $\varepsilon\neq 0$ $x^\varepsilon(t,t_0)$можно разложить в ряд Тейлора по ε. Ограничимся первыми тремя членами, получим

$$x^\varepsilon(t)=x^0(t)+\varepsilon\xi(t)+\varepsilon^2\xi^*(t,\varepsilon) \tag{183}$$

подставим полученное для $x^\varepsilon(t)$ выражение в (181), тогда уравнение примет вид

$$\frac{dx^\varepsilon}{dt}=F\left(x^0(t)+\varepsilon\xi(t)+\varepsilon^2\xi^*(t,\varepsilon),t\right)+\varepsilon G\left(x^0(t)+\varepsilon\xi(t)+\varepsilon^2\xi^*(x(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\right) \tag{184}$$

при $\varepsilon=0$ получаем (182).

Вспомним, как раскладываются в ряд функции типа $f(x+\varepsilon h)$. Напишем разложение в ряд по ε

$$f(x+\varepsilon h)=f(x)+\varepsilon f^{'}(x)h+\varepsilon^2\varphi(x,h,\varepsilon) \tag{185}$$

Применим это разложение к (184), получим :

$$\frac{d}{dt}x^0(t)+\varepsilon\frac{d\xi}{dt}+\varepsilon^2\frac{d\xi^*}{dt}=F(x^0(t),t)+\varepsilon\left\{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x^0(t)}\xi(t)+G(x^0(t),t)\right\}+\varepsilon^2(\text{что}-\text{то}) \tag{186}$$

Вычтем из полученого соотношения уравнение (182). Пренебрегая величинами порядка ε^2 получим:

$$\frac{d\xi}{dt}=\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x^0(t)}\xi+G(x^0(t),t) \tag{187}$$

или, если переписать в несколько другом виде

$$\frac{d\xi}{dt}=A(t)\xi+f(t) \tag{188}$$

Матрица $A(t)$ известна и $f(t)$ тоже. Получилась система неавтономных неоднородных линейных дифференциальных уравнений, с начальными условиями, например $\xi(t_0)=0$. (Но это просто для иллюстрации, начальные условия могут быть и другими)

В частности, если есть одно дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt}=F(x,t) \tag{189}$$

и известно его решение $x^*(t)$, то можно рассмотреть решения $x(t)$ близкие к нему

Пусть y вектор малого смещения $x=x^*(t)+y$. Подставим полученое соотношение в (189)

$$\frac{d}{dt}(x^*+y)=F(x^*(t)+y,t) \tag{190}$$

[1)] Здесь, как мне кажется, необходимо вставить пояснение. В выражении $x^\varepsilon(t,t_0)$, ε это НЕ степень, а индекс.

или, преобразуя,

$$\frac{dy}{dt} = F(x^* + y, t) - F(x^*(t), t) = \Phi(y, t) \tag{191}$$

где $\Phi(0, t) \equiv 0$. Мы видим, что $y = 0$ является решением. Отсюда, полагая, $y = \varepsilon\xi$, получим

$$\frac{d\xi}{dt} = A(t)\xi + \varepsilon(...) \tag{192}$$

Частный случай. Если система (189) было автономной, но рассматривалось периодическое решение

$$x^*(t + \tau) = x^*(t)$$

то после приведеной выше процедуры мы получим

$$\frac{d\xi}{dt} = A(t)\xi, \tag{193}$$

где $A(t)$ — периодическая матрица. Постоянная матрица A получится может если $x = x^*(t) \equiv 0$, то есть мы имеет дело с положением равновесия, или же при каком-то очень специальном подборе правых частей (попробуйте!).

Мы будем заниматься устойчивостью положения равновесия автономных систем,

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \quad F(0) = 0 \tag{194}$$

имеется решение $x(t) \equiv 0$, а общее решение будет $x(t, x_0), x(0) = x_0$. Это существенно упрощает задачу.

Дадим формальное определение устойчивости равновесия. Равновесие называется **устойчивым (по Ляпунову),** если

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta = \delta(\varepsilon) : \forall\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x_0)\| < \varepsilon \;\; \forall t > 0$$

Это на языке ε, δ. Это же определение можно переформулировать в терминах продолжаемости. Мы можем задать окрестность x_0 такую, что при продолжении решенния оно не выйдет из этой окрестности. Понятно, что это выполнено не всегда.

Пример

$$\frac{dx}{dt} = x^2 \tag{195}$$

Эта система легко решается. Ее решение $x = \frac{x_0}{1 - x_0 t}$. Понятно, что никакой устойчивости тут нет.

Тоже самое можно получить и для уравнений Ньютона.

$$x = \frac{1}{t + 1}$$

Дифференцируя, получим

$$\dot{x} = -\frac{1}{(t + 1)^2}$$

продолжая дифференцировать, получим

$$\ddot{x} = 2x^3$$

Можно записать потенциальную энергию: $V(x) = -\frac{x^4}{2}$

Можно записать интеграл энергии $\frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{x^4}{2} = h$, нарисовать фазовый портрет и рассмотреть устойчивость.

Общее замечание

Что будет если сделать (разумеется, невырожденную) замену переменных $x = x(y), x(0) = 0$? В этом случае, уравнение можно будет записать в виде

$$\frac{dy}{dt} = G(y)$$

но устойчивость сохранится.

Этот факт предлагается доказать самостоятельно.

. Функция Ляпунова...

... для системы $\frac{dx}{dt} = F(x), \quad F(0) = 0$ Дадим определение функции Ляпунова. Функцией Ляпунова (обозначается $V(x)$, важно не путать с потенциальной энергией) называется функция обладающая следующими свойствами:

1.$V(x)$ положительна определена в окрестности нуля, то есть $V(0) = 0$ и $V(x) > 0$ если $x \neq 0$

2. Производная по времени от функции $V(x)$ в силу системы (194) неположительна.

Напомним, что такое производная в силу системы.

$$\frac{dV}{dt} = \sum \frac{\partial V}{\partial x_i} F_i(x) \tag{196}$$

Существование функции Ляпунова, равносильно наличию устойчивости. Сформулируем этот важный результат в виде теоремы.

Теорема. Если у системы есть функция Ляпунова, то равновесие будет устойчивым.

Доказательство:

Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим множество $\{\|x\| = \varepsilon\}$ Это компактное множество, на нем функция $V(x)$положительна и достигает свой положительный минимум, в силу непрерывности. То есть $\exists \nu(\varepsilon) > 0 : V(x) > \nu$, если $\|x\| = \varepsilon$. Для этого ν существует $\delta(\nu) < \varepsilon : V(x_0) < \nu$, если $\|x_0\| < \delta$ по непрерывности. Предположим, что при каком-то t решение $x(x_0, t) > \varepsilon$, тогда при каком-то t_1 $\|x(t_1)\| = \varepsilon$, и $V(x(t_1)) > \nu$ Мы получили противоречие, так как функция $V(t)$ невозрастающая. **Теорема доказана.**

Продолжаем рассматривать следующий объект:

$$\dot{x} = F(x), \quad F(0) = 0. \tag{197}$$

Первое приближение системы (197) мы записываем так:

$$\dot{x} = Ax.$$

Определение. Равновесие $x = 0$ называется асимптотически устойчивым, если
1) оно устойчиво (см. лекцию 1),
2) $\exists \triangle > 0 : \|x_0\| < \triangle \Longrightarrow x(t, x_0) \to 0 t \to \infty$.

Примером асимптотической устойчивости является осцилятор с трением $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$, где c неслишком велико. (рис.(**??**)). Примером обратного служит следующий рисунок. Решение на рис.(**??**) не является асимптотически устойчивым, так как оно просто неустойчиво (какое бы мы ни взяли решение с начальными данными, лежащими в круге радиуса ε, оно из него выходит рис.(**??**)).

Вторая теорема Ляпунова. Пусть в некоторой окрестности нуля дана непрерывная, положительно определенная функция

$$V(x) : V(0) = 0 \quad V(x) > 0 \quad x \neq 0$$

такая, что ее полная производная в силу системы (197) *отрицательно определена.* Тогда равновесие асимптотически устойчиво.

Доказательство. Обозначим $\dot{V}$– производная в силу системы (197). Пусть $\triangle$ такое, что при $\|x\| < \triangle$ V – положительно определена, а $\dot{V}$– отрицательно определена (существование такого $\triangle$ заложено в формулировке теоремы). Заметим, что выполнены условия первой теоремы Ляпунова (см. лекцию 1), поэтому равновесие устойчивое. Рассмотрим ненулевое решение $x(t)$, начинающееся в области $\|x\| < \triangle$ и посмотрим на $V(x(t))$. Начальные условия для этого решения будут такими $\|x_0\| < \triangle$. Тогда всегда $x(t) \neq 0$ (по теореме о единственности решения), так что

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) < 0,$$

а сама она, $V(x(t)) > 0$ рис(**??**). Следовательно, $\exists \quad \alpha = \lim\limits_{t \to \infty} V(x(t))$ и $\alpha \geqslant 0$. Рассмотрим следующие случаи:

A) Пусть $\alpha > 0$. Поскольку $V(x)$ непрерывна в нуле, то $\exists\ \ \sigma > 0 : \|x\| < \sigma$ и $V(x) < \alpha$. Так как $V(x(t))$ убывающая функция и $V(x) > \alpha$, то $\|x\| \geqslant \sigma$. Рассмотрим множество $\sigma \leqslant \|x\| \leqslant \frac{\triangle}{2}$. На нем $\dot{V} \leqslant -K$ (так как для непрерывной функции на компакте существует наименьшее и наибольшее значение), отсюда получаем, что $V(x(t)) \leqslant V(x_0) - Kt$ (рис(**??**)). Строго говоря, последнее неравенство надо доказать, для этого надо рассмотреть функцию $W(t) = V(x(t)) - V(x_0) + Kt$, для которой $\dot{W} \leqslant 0$ и $W(0) = 0$, следовательно, $W(t) \leqslant 0$, откуда вытекает нужное неравенство. Из доказанного сейчас неравенства следует, что начиная с некоторого t функция становится отрицательной. Это противоречит тому, что $V(x(t)) > 0$, поэтому такого не может быть.
B) Пусть $\alpha = 0$, т.е. $V(x(t)) \to 0$. Это означает, что $\forall l > 0\ \exists T = T(l)$ такое, что $V(x(t)) < l$ при $t > T$. Возьмем произвольно $0 < \varepsilon < \dfrac{\triangle}{2}$. Положим $l = \min\limits_{\varepsilon \leqslant \|x\| \leqslant \frac{\triangle}{2}} V(x)$. Теперь при $t > T(l(\varepsilon)) \Longrightarrow \|x(t)\| \leqslant \varepsilon$. Это завершает доказательство теоремы.

Рассмотрим теперь линейнную систему : $\dot{x} = Ax$. Устойчивость линейной системы описывается следующими утверждениями : A) Система устойчива — каждое ее решение ограничено.
B) Система асимптотически устойчива — каждое решение стремится к нулю.
Доказательство I. Пусть линейная система устойчива. На языке ε и δ устоичивость записывается так: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \|x_0\| < \delta \Longrightarrow \|x(t)\| < \varepsilon$. Пусть вместе с тем существует неограниченное решение $y(t)$. Вместе с ним решением является $z(t) = \dfrac{\delta}{2}\dfrac{y(t)}{\|y(0)\|}$, так как система линейная. Заметим, что $\|z(0)\| = \frac{\delta}{2} < \delta$, но $z(t)$ неограниченная функция, и для нашего $\varepsilon\ \exists t_1$ такое, что $\|z(t_1)\| \geqslant \varepsilon$. Противоречие! Ведь система устойчива.

Обратно, пусть все решения ограничены. Тогда общее решение $x = e^{At}x_0$ имеет ограниченную матрицу e^{At}, поскольку она состоит из решений. Пусть $\|e^{At}\| \leqslant M$. Тогда получаем следующие неравенства для произвольного решения: $\|x(t)\| \leqslant \|e^{At}\|\,\|x_0\| \leqslant M\|x_0\|$. Теперь $\forall\ \ \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{M} : \|x_0\| < \delta \Longrightarrow \|x(t)\| < \varepsilon$, т.е по определению любое решение устойчиво. Что и требовалось доказать.

Теорема II тривиальна. Доказательство того, что условие стремления каждого решения к нулю является необходимым проводится от противного, анологично приведенному выше, достаточность вытекает из того, что каждое решение можно ограничить некоторой const.

Рассмотрим случай $n = 2$. Тогда характеристический многочлен представляет собой квадратный трехчлен с вещественными коэффициентами. Корни могут быть такие рис.(**??**). Случай II строго промежуточный, то есть нельзя изменяя параметры системы перейти из случая один в случай три.
Рассмотрим случай I. Существует вещественная замена переменных $y = Sx$ такая, что система принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{y_1} = \lambda_1 y_1; \\ \dot{y_2} = \lambda_2 y_2. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}; \\ y_1 = c_2 e^{\lambda_2 t}. \end{cases}$$

Теперь будем анализировать полученное решение. Рассмотрим функцию Ляпунова:

$$V = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2}. \tag{198}$$

Это тривиальная функция Ляпунова, ее надо запомнить. Тогда получаем:

$$\dot{V} = y_1\dot{y_1} + y_2\dot{y_2} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2.$$

Следовательно, если $\lambda_1,\ \lambda_2 \leqslant 0$, то $\dot{V} \leqslant 0$ и по второй теореме Ляпунова решение будет устойчивым, а асимптотически устойчиво в том случае, если $\lambda_1,\ \lambda_2 < 0$, рис. (**??**). Рассмотрим случай III. Тогда сущуствует комплексная замена переменных такая, что система принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{z_1} = \lambda_1 z_1; \\ \dot{z_2} = \lambda_2 z_2, \end{cases}$$

где $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$. Пусть $\lambda_1 = \rho + i\sigma$, $\lambda_2 = \rho - i\sigma$, $z_1 = x + iy$, $z_2 = \bar{z}_1$. Тогда $\dfrac{d}{dt}(x+iy) = (\rho + i\sigma)(x+iy)$ или

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}x = \rho x - \sigma y; \\ \frac{d}{dt}y = \sigma x + \rho y. \end{array} \right. \tag{199}$$

Система (199) может быть полученна вещественным преобразованием (см. линейнная алгебра). Возьмем ту же тривиальную функцию Ляпунова и получим:

$$\dot{V} = x(\rho x - \sigma y) + y(\sigma x + \rho y) = \rho(x^2 + y^2).$$

Если $\rho \leqslant 0$ – устойчивость, $\rho < 0$ – асимптотическая устойчивость рис.(**??**)

Анлогичные результаты можно сразу увидеть из формулы Эйлера представления комплексного числа:

$$z = Ce^{\rho t}(\cos \sigma t + i \sin \sigma t).$$

Рассмотрим случай равенства корней. Разберем сначала случай $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Тогда вещественным преобразованием матрицу A можно привести к одному из следующих видов:

$$1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим случай 1), при этом система запишется в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y_1} = 0; \\ \dot{y_2} = 0. \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_1 = c_1; \\ y_2 = c_2. \end{array} \right.$$

Как видно решением являются точки и это решение является устойчивым, но неасимптотически устойчивым.

Теперь рассмотрим случай 2), при этом система запишется в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y_1} = y_2; \\ \dot{y_2} = 0. \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_1 = c_1 + \mathrm{c}_2 t; \\ y_2 = c_2. \end{array} \right.$$

Как видно решение неограниченно возрастает и поэтому является неустойчивым.

Если $\lambda \neq 0$, тогда вещественным преобразованием матрицу A можно привести к одному из следующих видов:

$$1) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

При этом известно в общем случае, что если $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_{\text{к}}$, то частное решение надо искать в виде

$$P(t)e^{\lambda t}\boldsymbol{a}, \ \deg \ P = k - 1.$$

При $\lambda \neq 0$ вопрос об ограниченности или стремлении к нулю решает множитель $e^{\lambda t}$.

Общий вид расположения корней рис.(**??**): 1. Все $\mathrm{Re}\lambda_i < 0$ – асимптотическая устойчивость,

2. $\exists$ $\mathrm{Re}\lambda_i > 0$ – неустойчивость,

3. $\exists$ $\mathrm{Re}\lambda_i = 0$ – критический случай (может устойчиво, может неустойчиво).

Теорема (об устойчивости по первому приближению).

1. Все $\mathrm{Re}\lambda_i < 0$, то положение равновесия у $\dot{x} = F(x)$ асимптотически устойчиво.

2. $\exists\ \mathrm{Re}\lambda_i > 0$, то положение равновесия у $\dot{x} = F(x)$ неустойчиво.
3. $\exists\ \mathrm{Re}\lambda_i = 0$ – критический случай (то положение равновесия у $\dot{x} = F(x)$ может быть устойчивым, может быть неустойчивым).

Случай, когда все λ_i различные – типичный. Если у матрицы A это так, то у матрицы $A + \varepsilon B$ при достаточно малых ε – это тоже так. Из линейной алгебры известно, что вещественным преобразованием матрицу можно привести к каноническому виду :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \begin{pmatrix} \rho_1 & -\sigma_1 \\ \sigma_1 & \rho_1 \end{pmatrix} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \begin{pmatrix} \rho_p & -\sigma_p \\ \sigma_p & \rho_p \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

(здесь $k + 2p = n$, а символ 0 может означать и число, и небольшую матрицу – разберитесь, где какую именно). Для доказательства берутся те же функции Ляпунова, что и для линейной системы. Тогда

$$\dot{V}_{\text{нелин.}} = \dot{V}_{\text{лин.}} + O(\|x\|^2).$$

Можно считать, что $O(\|x\|^2)$ мало, поэтому положительная определенность $\dot{V}_{\text{нелин.}}$ будет зависеть от $\dot{V}_{\text{лин.}}$.

68.. Линеаризация уравнения Лагранжа в случае одной степени свободы.

Запишем лагранжиан и уравнение Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 - V(q), \quad a(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}a'(q)\dot{q}^2 + V'(q) = 0, \tag{200}$$

причем $a(q) > 0$. Будем исследовать уравнение вблизи положения равновесия $q(t) = q^*$. Если точка q^* — равновесие, то $V'(q^*) = 0$, то есть q^* критическая точка для $V(q)$. Сделаем замену переменных: представим q в виде $q = q^* + x$, считая x малой величиной. При достаточной гладкости $x(t)$ из того, что x мало следует, что $\dot{x} = \dot{q}$ и $\ddot{x} = \ddot{q}$ таже малые величины. Разложим в ряд Тейлора вблизи q^* функции $a(q)$ и $V'(q)$:

$$a(q) = a(q^*) + \text{малое}, \quad V'(q) = V''(q^*)x + \text{малое}$$

С учетом разложений после отбрасывания малых уравнение примет вид

$$a(q^*)\ddot{x} + V''(q^*)x = 0$$

Помним, что $a(q^*) > 0$, поэтому если $V''(q^*) > 0$ имеем невырожденный минимум, а уравнение можно записать так

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{V''(q^*)}{a(q^*)}}.$$

Это и есть уравнение *малых колебаний*.

69.. Линеаризация уравнений Лагранжа натуральной системы в малой окрестности положения равновесия.

Записываем лагранжиан и уравнения

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j - V(q) = \frac{1}{2}\left(A(q)\dot{q},\dot{q}\right) - V(q)$$

$$\sum_j a_{ij}(q)\ddot{q}_j + \sum_{j,k}\Gamma^i_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \iff A\ddot{q} + \Gamma(q,\dot{q}) + \frac{\partial V}{\partial q} = 0$$

Положение равновесия $q(t) = q^*$, следовательно

$$\left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_{q^*} = 0 \Longleftrightarrow q^* \text{ — критическая точка } V(q)$$

Сделаем замену переменных $q := q - q^*$. В новых переменных $q = 0$ является критической точкой. Уравнения Лагранжа после отбрасывания малых величин примут вид

$$\sum_j a_{ij}(0)\ddot{q}_j + \sum_j b_{ij}q_j = 0, \quad b_{ij} = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right|_0 \tag{201}$$

Можно то же записать в матричной форме (считая $A = A(0)$)

$$A\ddot{q} + Bq = 0 \tag{202}$$

Уравнения (201) и (202) — лагранжевы уравнения первого приближения. Они порождаются лагранжианом

$$L_0 = \frac{1}{2}(A\dot{q},\dot{q}) - \frac{1}{2}(Bq,q).$$

Можно подойти строже и линеаризовать систему первого порядка

$$\dot{q} = v, \quad \dot{v} = A^{-1}(-\Gamma(q,\dot{q}) - \frac{\partial V}{\partial q})$$

Результат будет тот же.

70.. Нормальные (главные) координаты натуральной системы; невырожденные минимумы, седла и максимумы потенциальной энергии: соответствующий вид общего решения линеаризованной системы и качественная картина траекторий движения.

Рассмотрим две квадратичные формы

$$\alpha = (Aq,q)\,, \quad \beta = (Bq,q)\,,$$

причем форма α положительно определена. Из линейной алгебры известно, что существует такая замена переменных $q = S\xi$ с матрицей перехода S, что

$$\alpha = \sum_i \xi_i^2, \quad \beta = \sum_i \Lambda_i \xi_i^2$$

Сделаем эту замену в L_0, заметим, что $S = \text{const}$ и $\dot{q} = S\dot{\xi}$:

$$L_0 = \frac{1}{2}\sum_i \xi_i^2 - \frac{1}{2}\sum_i \Lambda_i \xi_i^2 \tag{203}$$

Уравнения Лагранжа разделяются и каждое интегрируется отдельно:

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_1 + \Lambda_1 \xi_1 = 0 \\ \dots \\ \ddot{\xi}_n + \Lambda_n \xi_n = 0 \end{cases} \tag{204}$$

Рассмотрим случай, когда все $\Lambda_i > 0$; тогда будут колебания по всем координатам. Общее решение для ξ_i имеет вид

$$\xi_i = C_i \cos\sqrt{\Lambda_i}t + C_i' \sin\sqrt{\Lambda_i}t,$$

здесь $\omega_i = \sqrt{\Lambda_i}$ — частота колебаний. Для случая $n = 2$ получим бигармонический осцилятор.

71.. Достаточные условия неустойчивости положения равновесия натуральной системы.

Пусть все $\Lambda_i \neq 0$ (невырожденная критическая точка). Число отрицательных среди них называется степенью неустойчивости по Пуанкаре.

Если степень неустойчивости равна нулю, то равновесие исходной натуральной системы устойчиво по теореме Лагарнжа-Дирихле. Если не равна нулю, то неустойчива по первому приближению.

(#) Идея искусственного введения малого параметра

Искусственное введение малого параметра. Имеется функция

$$y = f(x) = ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} + \dots + x^n F_n(x)$$

Пусть $|x| < \varepsilon$ (x мало). Делаем замену переменных:

$$y = \varepsilon\eta,\ x = \varepsilon\xi$$

Считаем $\xi < 1$. Получим

$$\varepsilon\eta = a\varepsilon\xi + \frac{b\varepsilon^2\xi^2}{2} + \dots$$

$$\eta = a\xi + \frac{b\varepsilon\xi^2}{2} + \dots = a\xi + g(\varepsilon, \xi)$$

При $\varepsilon \to 0$ $\eta = a\xi$. Впоследствии будем писать $x := \varepsilon x$.

Дана $g(x)$, где $x = (x_1, \dots, x_n)$. Пусть $g(0) = 0$ и для всех i выполнено $\left.\frac{\partial g}{\partial x_i}\right|_0 = 0$, то есть 0 — критическая точка. Делаем замену $x := \varepsilon x$ и $g(x)$ представляется в виде

$$g := \frac{1}{2}\varepsilon^2(\Psi x, x) + \varepsilon^3(\dots), \quad \Psi = \left\| \left.\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}\right|_0 \right\|.$$

Пусть теперь дана система

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x),\ f(0) = 0$$

Делаем замену $x := \varepsilon x$. Система преобразуется к следующему виду

$$\frac{dx}{dt} = Mx + \varepsilon(\dots),$$

где

$$M = \left\| \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_0 \right\|$$

72.. Линеаризация уравнений Лагранжа в случае произвольного автономного лагранжиана.

Считаем $L(\dot q, q)$ произвольной, кроме того с малыми работаем строже. Выписываем уравнения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{205}$$

Положение равновесия, то есть решение вида

$$q(t) = q^*,\ \dot q(t) = 0, \tag{206}$$

имеет месо тогда и только тогда, когда

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)\bigg|_{q^*,0} = l_i, \quad \frac{\partial L}{\partial q_i}\bigg|_{q^*,0} = 0 \tag{207}$$

Это и есть система уравнений для отыскания q^*.

Делаем замену и калибровку: $q := q - q^*$, $\quad L := L - \sum_i l_i \dot q_i - L(0,0)$. Теперь имеем критическую точку L, и $L(0,0) = 0$.

Замена $q := \varepsilon q$ в критической точке дает

$$L = \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\begin{pmatrix} A & C \\ C^T & -B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot q \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot q, q \end{pmatrix}\right) + \varepsilon^3(\cdots), \tag{208}$$

причем $A = A^T$, $B = B^T$. Делим на ε^2 и устремляем $\varepsilon \to 0$. Получим

$$L_0 = \frac{1}{2}(A\dot q, \dot q) + (Cq, \dot q) - \frac{1}{2}(Bq, q) \tag{209}$$

По сравнению с натуральным лагранжианом матрица A не обязательно положительно определенная и добавились линейные по скоростям члены. Уравнения первого приближения примут вид

$$A\ddot q + (C - C^T)\dot q + Bq = 0 \tag{210}$$

Разложим матрицу C на кососимметричную и симметричную части: $C = \Omega + \Sigma$. Уравнения первого приближения и лагранжиан получают вид

$$A\ddot q + 2\Omega \dot q + Bq = 0, \quad L_0 = \frac{1}{2}(A\dot q, \dot q) + (\Omega q, \dot q) - \frac{1}{2}(Bq, q) \tag{211}$$

Заметим, что слагаемое $(\Sigma q, \dot q) = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}(\Sigma q, q)$ было отброшено еще одной калибровкой.

73.. Распределение собственных чисел линейной лагранжевой системы на комплексной плоскости.

Характеристическое уравнение для (211) таково:

$$f(\lambda) = \det(\lambda^2 A + 2\lambda\Omega + B) = 0 \tag{212}$$

вещественно, а после транспонирования матриц в скобках меняет знак перед λ и вместе с тем не должно измениться: $f(\lambda) = f(-\lambda)$. Значит, если λ — корень, то и $\bar\lambda$ — корень, и $-\lambda$ — корень.

Корни располагаются на комплексной плоскости четверками или парами на осях.

74.. Максимальное упрощение общей линейной лагранжевой системы в случае двух степеней свободы.

Рассмотрим случай, когда $n = 2$, A положительно определена, а B — диагональна (можем считать A единичной). Тогда

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \omega(x\dot{y} - y\dot{x}) - \frac{1}{2}(ax^2 + by^2)$$

Получился лагранжиан во вращающейся системе координат. Уравнения имеют вид

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} + ax = 0 \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} + by = 0 \end{cases}$$

75.. Явление гироскопической стабилизации в необратимых системах.

Последняя система равновисльна следующей системе первого порядка:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & -b & -2\omega & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}.$$

Будем искать решения в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Легко понять, что характеристическое уравнение системы

$$\det\begin{pmatrix} \lambda^2 + a & -2\omega\lambda \\ 2\omega\lambda & \lambda^2 + b \end{pmatrix} = 0 \iff \lambda^4 + \lambda^2(a + b + 4\omega^2) + ab = 0$$

Это биквадратное уравнение в вещественными коэффициентами. Значит, если λ — корень, то и $\bar{\lambda}$ — корень, и $-\lambda$ — корень. Дискриминант $D = (a - b)^2 + 8(a + b)\omega^2 + 16\omega^4$.

Рассмотрим типичные варианты значений λ^2 :

1) $D < 0$, вещественных значений нет — неустойчивость;

2) $\lambda_1^2 < 0$ и $\lambda_2^2 < 0$ — устойчивость;

3) $\lambda_1^2 < 0$ и $\lambda_2^2 > 0$ — неустойчивость;

4) $\lambda_1^2 > 0$ и $\lambda_2^2 > 0$ — неустойчивость.

Потенциала $V = \frac{1}{2}(a\eta_1^2 + b\eta_2^2)$: I) при $a > 0, b > 0$ (минимум) $\lambda_1^2, \lambda_2^2 < 0$ — устойчивость;

II) $a > 0, b < 0$ или наоборот (седло), значит $ab < 0$ — неустойчивость;

III)$a < 0, b < 0$ (максимум).

Тут требуется постепенность. При $\omega^2 = 0$ $\lambda_1^2 = -a > 0$, $\lambda_2^2 = -b > 0$ — неустойчивость. С ростом ω поначалу будет $D > 0$, λ_1^2, λ_2^2 положительны, неустойчивость сохраняется. При каком-то ω_1^2 дискриминант сменит знак; во всяком случае, при $a + b + 4\omega^2 = 0$ имеем $D = -4ab < 0$. Это неустойчивость. Но с дальнейшим ростом ω^2 при каком-то ω_2^2 станет одновременно $D > 0$, $-(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) = a + b + 4\omega^2 > 0$, $\lambda_1^2\lambda_2^2 = ab > 0$. Система станет устойчивой.

Комментарий. Вектор $\binom{-ax}{-by}$ трактуется как отталкивающая сила. При $\omega \neq 0$ появляются гироскопические силы. Пока ω невелико, отталкивание доминирует. Но при больших ω гироскомичесие силы так закручивают траектории, что приводят к стабилизации системы.

(#) Достаточные условия неустойчивости стационарных движений

Стационарное движение (223) неустойчиво, если $\det\left(\frac{\partial^2 V_{c^0}}{\partial r^2}\right)_{r=r_0} < 0$ Для доказательства неустойчивости рассмотрим движение на фиксированных уровнях циклических интегралов $c \equiv c_0$ и выпишем линеаризованные уравнения возмущенного движения приведенной по Раусу системы. Получим уравнение вида (212), В котором роль B играет матрица $K = (\partial^2 V_{c^0}/\partial r^2)$, а роль A некоторая полоижтельно определенная матрица, написанная ранее. Тогда

$$f(+\infty) = +\infty, \quad f(0) = |K_0| < 0 \Rightarrow \exists \lambda > 0,$$

следовательно, неустойчивость вытекает из теоремы Ляпунова о неустойчивости по первому приближению.

76.. Общие линейные лагранжевы системы в случае трех степеней свободы. Простейшие утверждения об устойчивости в зависимости от степени неустойчивости по Пуанкаре.

Исходим из

$$A\ddot{q} + 2\Omega\dot{q} + Bq = 0 \quad A, B - \text{симметричны}, \ \Omega - \text{ кососимметрична}$$

Будем считать, что A положительно определена, тогда после замены переменных

$$\ddot{\xi} + 2\Omega\dot{\xi} + \mathrm{diag}(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)\xi = 0 \text{ — здесь } \Omega \text{ — другая матрица}$$

При $n = 3$ можно написать, что $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $\Omega\xi = [\omega \times \xi]$. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + \Lambda_1 & -2\omega_3\lambda & 2\omega_2\lambda \\ 2\omega_3\lambda & \lambda^2 + \Lambda_2 & -2\omega_1\lambda \\ -2\omega_2\lambda & 2\omega_1\lambda & \lambda^2 + \Lambda_3 \end{vmatrix} = \lambda^6 + (\ldots)\lambda^4 + (\ldots)\lambda^2 + \Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3 = 0$$

Будем считать, что $\Lambda_i > 0$ или $\Lambda_i < 0$. Число отрицательных Λ_i называют степенью неустойчивости (по Пуанкаре)

Рисуем график нашего бикубического уравнения относительно λ^2. Если степень неустойчивости нечетна , то получается неустойчивость, ибо $\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3 < 0$ — положительный корень есть.

Это значит, что фукнция $W = \frac{1}{2}(\Lambda_1\xi_1^2 + \Lambda_2\xi_2^2 + \Lambda_3\xi_3^2)$ имеет максимум либо седло "индекса 1"(с одним отрицательным квадратом)

Если степень неустойчивости четная, т.е. $\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3 > 0$, то возможна устойчивость. Но если все $\Lambda_i > 0$ (это минимум W), то точно устойчивость в силу положительной определенности интеграла Якоби.

77.. Теоремы Кельвина-Четаева о сохранении устойчивости и о появлении асимптотической устойчивости.

Теорема 1. Устойчивое положение равновесия системы $A\ddot{x} + Bx = 0$ (матрицы A, B положительно определены) остается устойчивым при добавлении гироскопических и/или диссипативных сил: $A\ddot{x} + (G - D)\dot{x} + Bx = 0$, где $G = -G^T$ — кососимметрическая, $D = D^T$ — симметрическая неотрицательно определенная матрица. Доказательство: возьмем фукнцию

$$W = \frac{1}{2}(A\dot{x}, \dot{x}) + \frac{1}{2}(Bx, x) = W(x, \dot{x})$$

Она, очевидно, положительно определена. В силу второй системы $\dot{W} = -(D\dot{x}, \dot{x}) \leqslant 0$. По теореме Ляпунова имеем устойчивость.

Теорема 2. Изолированное устойчивое положение системы $A\ddot{x} + Bx = 0$ становится асимптотически устойчивым при добавлении диссипативных сил с полной диссипацией, т.е. $(D\dot{x}, \dot{x}) > 0 \ \ \forall \dot{x} > 0$ (независимо от гироскопических сил).

Рассмотрим функцию

$$W = \frac{1}{2}(A\dot{x}, \dot{x}) + \frac{1}{2}(Bx, x) + \alpha(Ax, \dot{x}), \tag{213}$$

где $\alpha > 0$ настолько мало, чтобы функция W была положительно определена. Теперь

$$\dot{W} = -(D\dot{x}, \dot{x}) + \alpha(A\dot{x}, \dot{x}) - \alpha[(G + D)\dot{x}, x] - \alpha(Bx, x) = -W_*,$$

где квадратичная форма W_* имеет матрицу

$$M(\alpha) = \begin{Vmatrix} D - \alpha A & \alpha(G + D) \\ \alpha(D - G) & \alpha B \end{Vmatrix}.$$

В n последних ее столбцах стоит множитель α.

Поэтому все диагональные миноры имеют вид $\Delta_k[M(\alpha)] = \Delta_k[D] + \alpha\Phi_k(\alpha)$ (первые n) либо $\Delta_{n+k}[M(\alpha)] = \det D\Delta_k[B] + \alpha^k\Phi_{n+k}(\alpha)$, то есть положительны. Для этого может потребоваться уменьшить интервал значений α.

Заключение. Значит, W_* определено положительна и осталось применить теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости.

78.. Теоремы Кельвина-Четаева о сохранении неустойчивости.

Изолированное и неустойчивое положение системы $A\ddot{x} + Bx = 0$ остается неустойчивым при добавлении диссипативных сил с полной диссипацией.

Если для изолированного положения системы $A\ddot{x} + Bx = 0$ степень его неустойчивости нечетная, то это равновесие остается неустойчивым при добавлении гироскопических сил.

79.. Функции Ляпунова механических систем.

Мы будем рассматривать следующие механические системы: голономные, автономные. При этом на систему действуют потенциальные, гироскопические и диссипативные силы. В этом случае кинетическая энергия будет иметь вид

$$T(\dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{q}) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j. \tag{214}$$

При сделанных выше предположениях имеют место уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \tag{215}$$

где в правой части стоят обобщенные силы. Они в рассматриваемом случае состоят из трех частей:

$$Q_i = -\frac{\partial V(\boldsymbol{q})}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\Big(\sum w_k(\boldsymbol{q})\dot{q}_k\Big)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial\Big(\sum w_k(\boldsymbol{q})\dot{q}_k\Big)}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\frac{1}{2}\sum c_{kl}(\boldsymbol{q})\dot{q}_k\dot{q}_l \tag{216}$$

Здесь первое слагаемое — потенциальные силы, второе и третье — гироскопические, а четвертое — диссипативные.

Предполагается, что $||a_{ij}||$ — симметрическая и положительно определенная матрица, а $||c_{ij}||$ — симметрическая и неотрицательно определенная матрица.

Запишем теорему об изменении кинетической энергии системы

$$\frac{dT}{dt} = \sum Q_i \dot{q}_i \implies \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sum a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j + V\right) = -2\Phi. \tag{217}$$

(Отметим, что в последнее выражение не вошли гироскопические силы вследствие того, что они не совершают работы.)

Пусть точка $q = 0$ — точка равновесия системы, т.е. $\forall i \ \left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_{\boldsymbol{q}=0} = 0$. Имеет место

Теорема Лагранжа–Дирихле. Пусть $\boldsymbol{q} = 0$ — строгий минимум потенциальной энергии $V(\boldsymbol{q})$, и действуют только потенциальные силы. Тогда $\boldsymbol{q} = 0$ — устойчивое положение равновесия.

Доказательство: без ограничения общности считаем $V(0) = 0$. По условию $\boldsymbol{q} = 0$ строгий минимум. Это означает, что в какой-то проколотой окрестности нуля функция $V(\boldsymbol{q})$ строго больше нуля. В качестве функции Ляпунова возьмем первый интеграл системы

$$H = \frac{1}{2}\sum a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j + V(\boldsymbol{q}) \tag{218}$$

H положительно определена, т.к. оба слагаемых неотрицательны и равны нулю только тогда, когда $\forall i \ \dot{q}_i = q_i = 0$. А полная производная $\frac{dH}{dt}$ равна нулю. Следовательно, по первой теореме Ляпунова положение $\boldsymbol{q} = 0$ устойчиво.

Теорема Кельвина–Четаева. Пусть $\boldsymbol{q} = 0$ — строгий минимум потенциальной энергии $V(\boldsymbol{q})$, и кроме потенциальных действуют гироскопические и диссипативные силы. Тогда устойчивость сохраняется.

Доказательство: как и в предыдущей теореме, в качестве функции Ляпунова берем полную энергию H. В этом случае имеем положительно определенную функцию H с неположительной производной:

$$\frac{dH}{dt} = -2\Phi \leqslant 0 \tag{219}$$

Аналогично, по теореме Ляпунова устойчивость сохраняется.

Определение. Минимум $\boldsymbol{q} = 0$ называется *невырожденным*, если $\left.\left\|\frac{d^2V}{dq_i{}^2}q_j\right\|\right._{\boldsymbol{q}=0}$ положительно определена.

Теорема. Если минимум невырожден и Φ положительно определена как функция скоростей (это называется полной диссипацией), то устойчивость становится асимптотической.

Доказательство: введем нормальные координаты $\xi_1, ..., \xi_n$. Кинетическая и потенциальная энергии примут вид:

$$T = \frac{1}{2}\sum \dot{\xi}_i^2, \ V = \frac{1}{2}\sum \lambda_i \xi_i^2, \tag{220}$$

причем все $\lambda_i > 0$ (в силу невырожденности). При переходе к нормальным координатам выражения для диссипации и гироскопических сил изменились. Будем рассматривать происходящее в первом приближении. Тогда уравнения Лагранжа будут иметь вид

$$\ddot{\xi}_i = -\lambda_i\xi_i + \sum_j \gamma_{ij}\dot{\xi}_j - \sum_j d_{ij}\dot{\xi}_j, \tag{221}$$

где второе и третье слагаемое в правой части — все, что осталось от диссипативных и гироскопических сил. Причем матрицы $\|\gamma_{ij}\|$ — кососимметрическая, $\|d_{ij}\|$ — симметрическая и положительно определенные.

Введем функцию Ляпунова в виде $H_\beta := H + \beta\sum \xi_i\dot{\xi}_i$. Отметим, что при достаточно малых β функция H_β останется по-прежнему положительно определенной, как и H. Действительно, рассмотрим положительно определенную матрицу M и матрицу $M + \beta N$. Для положительной определенности новой матрицы необходимо, чтобы все ее угловые миноры были больше нуля. Угловые миноры — это многочлены от β,

причем при $\beta = 0$ они все больше нуля (M положительно определена). Значит, при достаточно малых β они останутся положительными.

Вычисляем полную производную по времени от функции Ляпунова H_β:

$$\frac{dH_\beta}{dt} = \frac{dH}{dt} + \beta\frac{d}{dt}\left(\sum \xi_i\dot{\xi}_i\right) = -2\Phi + \beta\sum\dot{\xi}_i^2 + \beta\sum\xi_i\ddot{\xi}_i =$$

$$= -\sum(d_{ij} - \beta\delta_{ij})\dot{\xi}_i\dot{\xi}_j - \beta\sum\lambda_i\xi_i^2 - \beta\sum(d_{ij} - \gamma_{ij})\xi_i\dot{\xi}_j$$

форму в переменных $\dot{\xi}_1, ..., \dot{\xi}_n, \xi_1, ..., \xi_n$. Вынесем знак минус и введя очевидные переобозначения, запишем матрицу $2n \times 2n$ оставшейся квадратичной формы

$$\begin{pmatrix} d_{ij} - \beta\delta_{ij} & -\beta\theta_{ij}/2 \\ -\beta\theta_{ij}/2 & \beta\lambda_i\delta_{ij} \end{pmatrix}$$

и разберемся с ее угловыми минорами.

Первые n угловых миноров $\Delta_1, ..., \Delta_n$ являются угловыми минорами матрицы $D - \beta E$, но так как матрица D положительно определена, то при достаточно малых β матрица $D - \beta E$ будет тоже положительно определена. Теперь посмотрим, что из себя представляют миноры Δ_{n+k}:

$$\det\begin{vmatrix} D - \beta E & -\beta\frac{\theta_{ij}}{2} \\ & \beta\lambda_1 \\ -\beta\frac{\theta_{ij}}{2} & .... \\ & & \beta\lambda_k \end{vmatrix} = \beta^k \det\begin{vmatrix} D - \beta E & -\beta\frac{\theta_{ij}}{2} \\ & \lambda_1 \\ \frac{-\theta_{ij}}{2} & .... \\ & & \lambda_k \end{vmatrix}$$

Видим, что при множителе β^k стоит многочлен от β, который при $\beta = 0$ положителен. Следовательно, в некой окрестности и эти миноры будут положительны. Таким образом, $\frac{dH_\beta}{dt}$ есть невырожденная отрицательно определенная квадратичная форма $\dot{\xi}, \xi$ при достаточно малых β.

Напомним, что было рассмотрено первое приближение. Во втором приближении и далее будут дополнительные члены большего порядка, на положительную определенность $-\dot{H}_\beta$ они влиять не будут.

. Теоремы Ляпунова о неустойчивости

Собственно теорема. Пусть в некоторой окрестности равновесия $x = 0$ системы $\dot{x} = F(x)$ существует функция $V(x)$, $(V(0) = 0)$ такая, что
$A)$ V принимает положительные значения в любой проколотой сколь угодно малой окрестности нуля;
$B)$ $\frac{dV}{dt} = \varkappa V + W$, где $\varkappa \geqslant 0$, $W \geqslant 0$.
Неустойчивость будет иметь место при одном из двух достаточных условий:
1) $\varkappa > 0$;
2) $\varkappa = 0$; W — положительно определена.
Доказательство: возьмем произвольно $\varepsilon > 0$; $0 < \delta < \varepsilon$. Положим $\sigma = \max\limits_{\|x\| \leqslant \delta/2} V(x)$. Возьмем такое x_0, что $V(x_0) = \sigma$. Заметим, что на множестве $\delta/2 \leqslant \|x\| \leqslant \varepsilon$ по условию $W(x) \geqslant \mu > 0$. Рассмотрим траекторию $v(t) = V(x(t))$. Из леммы об интегральном неравенстве имеем

$$\frac{dv}{dt} \geqslant \varkappa v + \mu;\ (v(0) = \sigma) \implies v(t) \geqslant \sigma e^{\varkappa t} + \mu t.$$

Если $\varkappa > 0$, то даже если $\mu = 0$, функция $v(t)$ быстро возрастает, а если $\varkappa = 0$ и $\mu > 0$, то $v(t)$ опять монотонно возрастает. Рано или поздно $v(t)$ станет больше $\max\limits_{\|x\| \leqslant \varepsilon} V(x)$ и выйдет из ε-окрестности. Это и показывает неустойчивость.

80.. Теорема Рауса-Сальвадори об устойчивости стационарного движения.

Пусть среди обобщенных координат есть циклические:

$$q = (q_1, q_2, \ldots, q_n) = (r_1, r_2, \ldots, r_k, \xi_1, \ldots, \xi_m), m + k = n.$$

Потенциальная энергия $V = V(r)$, кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2}\left(A(r)\begin{pmatrix}\dot r\\ \dot\xi\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\dot r\\ \dot\xi\end{pmatrix}\right), \quad A = \begin{pmatrix} N & B\\ B^T & C\end{pmatrix}$$

Положим $\eta = \dot\xi, u = \dot r$. Уравнения Лагранжа с $L = T - V$ можно переписать в виде

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u} = \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\partial V}{\partial r},\ \dot r = u,\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \eta} = 0,\ \dot\xi = \eta. \end{cases} \tag{222}$$

В них выделяется подсистема уравнения в переменных $r, \dot r, \eta$. Они равносильны уравнениям Рауса

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial R}{\partial \dot r} = \dfrac{\partial R}{\partial r}\\ \dot c = 0, \quad \dot\xi = -\dfrac{\partial R}{\partial c} \end{cases}$$

В них выделяется подсистема уравнения в переменных $r, \dot r, c$. Здесь функция Рауса

$$R = R_2 + R_1 - V_c(r), \quad R_2 = \big((N - B^TC^{-1}B)\dot r, \dot r\big) > 0, \quad R_1 = (B^TC^{-1}c, \dot r), \quad V_c(r) = V(r) + \frac{1}{2}(C^{-1}(r)c, c)$$

Обобщенный интеграл энергии: $R_2 + V_c = h = const$. Пусть при заданном c имеем положение равновесия приведенной системы: $r = r(c) \Longleftrightarrow \dfrac{\partial V_c}{\partial r} = 0$. Соответствующее стационарное движение исходной лагранжевой системы:

$$r = r(c), \dot r = 0, \eta = \eta(c) \equiv C^{-1}(r(c))c; \quad \xi = \eta(c)(t - t_0) + \xi_0 \tag{223}$$

Теорема. Если приведенный потенциал $V_0(r)$ при фиксированных значениях c_0 постоянных циклических интервалов имеет в точке $r_0 = r(c_0)$ строгий локальный минимум, то стационарное движение устойчиво по отношению к $r, \dot r, \eta = \dot\xi$. Иными словами, устойчиво состояние равновесия подсистемы (222) в соответствующих переменных.

Рассмотрим функцию Ляпунова:

$$W(r, \dot r, \dot\xi) = \left[(R_2 + V_c(r) - V_{c^0}(r^0))^2 + (c - c^0)^2\right] \Big|_{c = \partial T/\partial\dot\xi}$$

Тогда W - первый интеграл движения, причем

$$W(r_0, 0, \dot\xi_0[\eta(c_0)]) = 0, \quad W \geqslant 0$$

Переход от переменных $r, \dot r, \eta = \dot\xi$ к переменным $r, \dot r, c$ убеждает, что для некоторого $\sigma > 0$

$$0 < ||r - r^0|| + ||\dot r|| + ||\eta - \dot\xi^0|| < \sigma \ \Rightarrow\ W > 0.$$

Устойчивость вытекает из теоремы Ляпунова.

81.. Удобный выбор полных производных

Запишем систему дифференциальных уравнений, которая отвечает полному уравнению возмущенного движения:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{dx}{dt} & = & F(x) \\ F(0) & = & 0 \end{array}\right. \tag{224}$$

линеаризуем ее:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{dx}{dt} & = & Ax \\ A & = & \left.\dfrac{\partial F}{\partial x}\right|_{x=0} \end{array}\right. \tag{225}$$

От (224) мы можем с помощью некоторой замены $x = Sz$ перейти к системе

$$\frac{dz}{dt} = \Lambda z \tag{226}$$

причем матрица Λ имеет верхне-треугольный вид, то есть на главной диагонали стоят числа $\lambda_1 \cdots \lambda_n$, где $\lambda_i \in C$, под главной диагональю - нули, а сверху от главной диагонали находится что-то, но в данный момент нам не важно что именно (такое приведение всегда возможно, так как существует жорданов вид):

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{227}$$

Теперь перейдем к задачам данного раздела, которых две:
Дана функция $\Phi(x)$ и первая из задач состоит в том, чтобы найти функцию $V(x)$ такую, что

$$\frac{d^{(224)}V}{dt} = \Phi(x)$$

(то есть в силу системы уравнений (224)), а вторая, в том чтобы найти функцию $V(x)$ только уже в силу другой системы уравнений:

$$\frac{d^{(225)}V}{dt} = \Phi(x)$$

Заметим, что вторая задача является значительно более легкой, чем первая.

Для того, чтобы найти решение этих задач, давайте разложим функцию $\Phi(x)$ в ряд:

$$\Phi(x) = \sum \underbrace{\Phi_{j_1 \cdots j_n}}_{\text{числа}} \underbrace{{x_1}^{j_1} \cdots {x_n}^{j_n}}_{\text{одночлены}}$$

где ${x_1}^{j_1} \cdots {x_n}^{j_n}$ - это какие-то одночлены степени $|j| = j_1 + j_2 + \cdots + j_n$. Далее группируем стандартным образом и получаем однородную форму Φ_m степени m, которую в следующем равенстве просто запишем через мультииндекс:

$$\Phi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_m = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{|j|=m} \Phi_j x^j \tag{228}$$

где $j = (j_1, \cdots, j_n)$ (эти выражения и называются **мультииндексом**),
$|j| = j_1 + \cdots + j_n$ и $x^j = {x_1}^{j_1} \cdots {x_n}^{j_n}$.

Теперь, когда мы привели выражение для данной нам функции к удобному виду, необходимо как-то упорядочить получившиеся одночлены. Легче всего это сделать так называемым лексикографическим способом, то есть какой-то одночлен

объявляется старше других, а оставшиеся с ним сравниваются. Пусть, например, x_1 - старший, тогда получаем: $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$ (значок $>$ здесь понимается как "старше"). То есть фактически мы получили алфавитный порядок: $A > B > C > \cdots$.

Давайте сейчас возьмем два одночлена, один из которых больше другого и подумаем, что же следует сказать про их индексы (показатели). Пусть $x^j > x^{j'}$. Для того, чтобы сравнить их индексы, рассмотрим первые элементы. Получим, что один из них старше или что они равны. В последнем случае, берем вторые элементы и сравниваем уже их и так далее. Но данные рассуждения можно записать и в более кратком виде:

$$\exists\, k > 0 :\ j_1 = j_1' \,;\ \cdots ;\ j_{k-1} = j_{k-1}' \,;\ j_k > j_k'$$

В результате мы получили, что для любой Φ_m - однородной формы все одночлены можно упорядочить.

Будем решать уравнение:

$$\frac{d^{(225)}}{dt} \underbrace{V_m}_{\text{неизвестные}} = \underbrace{\Phi_m}_{\text{известные}} \tag{229}$$

Написать такое возможно, так как производная от однородной формы в силу линейной системы (225) тоже есть однородная форма той же степени. Для того, чтобы решить данное уравнение (229), сделаем замену:

$$x = Sz \tag{230}$$

Тогда функция $\Phi_m(x)$ соответственно должна преобразоваться в какую-то другую функцию $\Psi_m(z)$. И по тому же правилу функция $V_m(z)$ преобразуется в функцию $W_m(z)$. Тогда получаем:

$$\frac{d}{dt} z^j = \frac{d}{dt}(z_1{}^{j_1} z_2{}^{j_2} \ldots z_k{}^{j_k} \ldots z_n{}^{j_n}) \tag{231}$$

Можно применить формулу Лейбница (то есть один сомножитель дифференцируем, а остальные оставляем на месте)

$$\frac{d}{dt} z^j = \frac{d}{dt}(z_1{}^{j_1} z_2{}^{j_2} \ldots z_k{}^{j_k} \ldots z_n{}^{j_n}) = \sum_{k=1}^{n} z_1{}^{j_1} z_2{}^{j_2} \ldots [\underline{j_k z_k{}^{j_k - 1}}(\ \underline{\lambda_k z_k}\ +\ \sum_{l>k} \Lambda_{kl} z_l)] \ldots z_n{}^{j_n} \tag{232}$$

производная в квадратных скобках начнется с $\lambda_k z_k$, так как про матрицу Λ мы знаем, что она верхнетреугольная.

Соберем вместе подчеркнутые линией члены (это те члены, которые содержат Λ и получим:

$$\frac{d}{dt} z^j = (\sum_k j_k \lambda_k) z_1{}^{j_1} z_2{}^{j_2} \ldots z_k{}^{j_k} \ldots z_n{}^{j_n}\ +\ !!! = (\lambda, j)\ z^j + !!! \tag{233}$$

Тремя восклицательными знаками мы обозначили члены младшего порядка (или просто много младших одночленов). В качестве коэффициента мы получили стандартное скалярное произведение, где $\lambda = \lambda_1,\ \ldots, \lambda_n$.

Вспомним, что мы решаем уравнение $\frac{d^{(225)}}{dt} V_m = \Phi_m$, которое в результате замены $x = \delta z$ преобразовалось в уравнение

$$\frac{d^{(225)}}{dt} W_m = \Psi_m \tag{234}$$

и для того чтобы его решить, мы должны собрать все коэффициенты при одночленах (то есть при каждом z^j) и приравнять те, которые находятся в левой части уравнения, к тем, которые стоят в правой. В

результате получаем, что справа в (234):

$$\begin{pmatrix} \Psi_{m,0,0,\ldots,0} \\ \cdots \\ \Psi_{m-1,1,0,\ldots,0} \\ \cdots \\ \Psi_{0,0,0,\ldots,m} \end{pmatrix} \tag{235}$$

Слева в (234) получатся какие-то линейные выражения относительно коэффициентов: $W_m = \sum W_j{}^m z^j$, то есть получаем тождества, которые равносильны матричному равенству что слева стоит произведение матриц

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 m & 0 & & & \\ 0 & \lambda_1(m-1)+\lambda_2 & 0 & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & (\lambda_j, j) & & \\ & * & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{m,0,0,\ldots,0} \\ W_J \\ \cdots \\ \\ W_{0,0,0,\ldots,m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi_{m,0,0,\ldots,0} \\ \cdots \\ \Psi_j \\ \Psi_{0,0,0,\ldots,m} \end{pmatrix} \tag{236}$$

то есть уравнение (234) разрешимо тогда и только тогда, когда из $|j| = m$ следует, что $(\lambda, j) \neq 0$, то есть, если $j_1 + j_2 + \cdots + j_m = m$, то $j_1\lambda_1 + j_2\lambda_2 + \cdots + j_n\lambda_n \neq 0$.

Рассмотрим частный случай: $m = 2$. Пусть

$$\frac{dV_2}{dt} = -({x_1}^2 + {x_2}^2 + \ldots + {x_n}^2)$$

Из проделанных выше вычислений следует, что $(\lambda, j) \neq 0$ при $|j| = 2$. Это может быть только при $j = (0, \ldots, 2, \ldots, 0)$ или (так как это степень) при $j = (0, 1, 0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots)$. Чтобы решить нашу систему, надо чтобы λ_i были либо

1). $\lambda_i \neq 0$

либо

2). $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$, при $i \neq j$.

А теперь нарисуем комплексные корни, исходя из наших условий (1) и (2): на рисунке 1 показано, где корни располагаться не могут. В частности, пусть все $\mathrm{Re}\lambda_i < 0$ (то есть все корни лежат в левой полуплоскости).

Тогда, как видно из рисунка свойства (1) и (2) выполнены и решение данного уравнения существует.

Теперь ответим на такой вопрос: Может ли V_2 принимать отрицательные значения? Предположим, что может, тогда она принимает отрицательное значение и в сколь угодно малой окрестности той точки. Так как по условию это квадратичная форма (если она принимает отрицательные значения, то на каком-то луче), тогда $V = -V_2$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ляпунова о неустойчивости, которая рассматривалась нами ранее, то есть $-V_2$ принимает положительные значения, а ее производная $\frac{dV}{dt} = \sum {x_i}^2$ - положительно определена. В результате мы получили, что имеет место неустойчивость, а было доказано, что когда $\mathrm{Re}\lambda_i < 0$ должна быть устойчивость. Получили противоречие.

Стало быть, имеем $V_2 \geqslant 0$. Поэтому V_2 можно представить в виде

$$V_2 = \sum {l_1}^2 + \ldots + {l_p}^2,$$

где l_i – линейные однородные формы (это приведение к главным осям) Тогда производная будет выглядеть следующим образом:

$$\dot{V}_2 = 2\sum_{i=1}^{p} l_i\, \dot{l}_i \Big|_{l_1 = l_2 = \ldots = l_p = 0} = 0 \tag{237}$$

Очевидно, что она равна нулю, если все функции l_i обращаются в нуль. Теперь вспомним, что

$$\frac{dV_2}{dt} = -({x_1}^2 + {x_2}^2 + \ldots + {x_n}^2)$$

по условию, поэтому существует только одна точка, в которой достигается нуль нуль производной. Следовательно, все l_p линейно независимы и их n штук, и поэтому V_2 положительно определена.

Теперь вычислим $\frac{d{V_2}^{(224)}}{dt}$ в силу исходной системы

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \sum_{|j|>=2} F_j x^j$$

где F_j - это вектор (а не число). Тогда получим:

$$\frac{d{V_2}^{(224)}}{dt} = -({x_1}^2 + {x_2}^2 + \ldots + {x_n}^2) + D_3 + D_4 + \ldots$$

D_i- однородные формы соответствующей степени, то есть
$D_i = o\,({x_1}^2 + {x_2}^2 + \ldots + {x_n}^2)$. Так как знак этой суммы определяется знаком главного слагаемого, который всегда $\leqslant 0$, то можем сделать вывод, что $\frac{d{V_2}^{(224)}}{dt}$ - отрицательно определена. Но V_2 остается положительно определенной. Тогда попадаем в условия теоремы Ляпунова об устойчивости, из которой следует, что устойчивость будет и в нелинейной системе.

82.. Теоремы о неустойчивости.

В этой лекции будем рассматривать "полную"систему дифференциальных уравнений ("полную— не в смысле разрешимую относительно всех переменных, а в смысле нелинеаризованную) и линеаризованную:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \sum_{|j|\geqslant 2} F_j x^j; \tag{238}$$

$$\frac{dx}{dt} = Ax. \tag{239}$$

Кроме того имеем некую однородную m–форму $W_m = \sum_{|j|=m} W_j x^j$. Напоминаем обозначения: $x^j = x_1^{j_1} ... x_n^{j_n}$; $|j| = j_1 + ... + j_n$; $\frac{d^{\text{полн}}}{dt}$ и $\frac{d^{\text{лин}}}{dt}$ — производные в силу систем (238) и (239) соответственно.

Запишем производную формы W_m в силу системы (239)

$$\frac{d^{\text{лин}} W_m}{dt} = \Phi_m \tag{240}$$

и в силу системы (238)

$$\frac{d^{\text{полн}} W_m}{dt} = \Phi_m + \Psi_{m+1} + \Psi_{m+2} + \ldots\ , \tag{241}$$

где $\Psi_{m+1},\ \Psi_{m+2}$ — формы более высоких порядков, чем m. Как отмечалось в прошлой лекции, если задана Φ_m, то W_m заведомо можно найти, только если $|j| = m$, то $(\lambda, j) \neq 0$, где λ вектор собственных значений матрицы A, а $j = (j_1, ..., j_n)$. Отметим, что соотношение $(\lambda, j) \neq 0$ задает в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n\{\lambda\}$ все, кроме нескольких плоскостей, перпендикулярных векторам j.

Кстати, вот несколько задач по поводу:

Задача 1. Как и когда решается уравнение $\frac{d^{\text{лин}} W}{dt} = \Phi = \sum_{m\geqslant 2} \Phi_m$?

Задача 2. Как и когда решается уравнение $\dfrac{d^{\text{полн}}W}{dt} = \Phi = \sum\limits_{m\geqslant 2} \Phi_m$?

Напоминаем, что если у собственных чисел λ_k матрицы A линеаризованной системы все $\mathrm{Re}\lambda_k < 0$, то и линейная, и полная системы асимптотически устойчивы.

Теорема. Если существует хотя бы одно λ_k такое, что $\mathrm{Re}\lambda_k > 0$, то неустойчивы и полная и линейная системы.

Доказательство: будем подгонять под теорему Ляпунова о неустойчивости, с этой целью рассмотрим вспомогательную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Bx\ ,\ \text{где матрица } B = A - \frac{\varkappa}{2}E,\ \varkappa \geqslant 0. \tag{242}$$

Собственные числа матрицы B, очевидно, будут такими: $\mu_i = \lambda_i - \frac{\varkappa}{2}$. Они отличаются от λ_i смещением влево на комплексной плоскости на $\varkappa/2$(рис. **??**).

Будем искать квадратичную форму V такую, что

$$\frac{d^{\text{вспом}}V}{dt} = \sum x_i^2\ . \tag{243}$$

Сейчас $|j| = 2$. Это означает, что есть либо один одночлен в степени 2, либо два одночлена в первой степени. Для разрешения вопроса, как отмечалось в предыдущей лекции, необходимо, чтобы

$$\sum \mu_p j_p \neq 0 \iff \sum \lambda_p j_p \neq \varkappa\ . \tag{244}$$

(Обратите внимание не $\varkappa/2$, а $\varkappa$. ЭТО НЕ ОПЕЧАТКА.) Пока мы не оговаривали каким может быть $\varkappa$. Всегда можем взять такую $0 < \varkappa < 2\mathrm{Re}\lambda_k$ (здесь то самое λ_k, у которого максимальная положительная действительная часть. Это надо помнить!), что будет выполнено (244). Это можно сделать, так как мы вычислим в последнем уравнении (244) сумму и у нас будет конечное число вариантов, чему не должно быть равно $\varkappa$. Отсюда и выбираем $\varkappa$.

Таким образом, существует такая V, что

$$\sum x_i^2 = \frac{d^{\text{вспом}}}{dt}V = \frac{d^{\text{лин}}}{dt}V - \frac{\varkappa}{2}\sum \frac{\partial V}{\partial x_i}x_i\ .$$

Отсюда, учитывая, что $\sum \dfrac{\partial V}{\partial x_i}x_i = 2V$ получаем

$$\frac{d^{\text{лин}}V}{dt} = \varkappa V + \sum x_i^2. \tag{245}$$

Нам нужно применить теорему Ляпунова о неустойчивости из позапрошлой лекции. Положительность $\varkappa$ уже обусловлена нашим выбором. Кроме того, выполнено $W \geqslant 0$ — т.к. в нашем случае $W = \sum x_i^2$. Осталось убедиться в том, что V принимает положительные значения в любой проколотой сколь угодно малой окрестности нуля. Докажем от противного. Пусть это не так. Тогда:

1 вариант: V отрицательно определена. Тогда $-V$ будет у нас функцией Ляпунова, причем

$$\frac{d^{\text{вспом}}}{dt}(-V) = -\sum x_i^2\ .$$

Функция Ляпунова положительно определена, а ее производная в силу системы (242) — отрицательно определена. Следовательно, по теореме Ляпунова вспомогательная система (242) асимптотически устойчива. Что не верно, так как мы сместили λ_k с максимальной положительной действительной частью на $\varkappa/2 < \mathrm{Re}\lambda_k$. Т.о. налицо противоречие.

2 вариант: $V \leqslant 0$, но не отрицательно определена (т.е. принимает значения 0 не только в нуле). Тогда, как в прошлой лекции, имеем

$$V = -\sum_{p=1}^{p_0} l_p^2,\ \text{где } p_0 < n$$

где l_p некие линейные формы. Далее имеем

$$\frac{d^{\text{вспом}}}{dt}V = -2\sum l_p \dot{l}_p = 0|_{\text{все } l_p=0} \ .$$

Т.е. производная в силу вспомогательной системы (242) обращается в нуль не только в нуле, но и на некотором линейном многообразии. А это противоречит выбору квадратичной формы V (см. (243)).

Таким образом, доказана неустойчивость линейной системы. Теперь вычислим

$$\frac{d^{\text{полн}}}{dt}V = \varkappa V + \left(\sum x_i^2 + D_3 + D_4 + ...\right) \ , \tag{246}$$

где D_3, D_4 — члены, выше второго порядка. Т.о. если $\sum x_i^2$ положительно определена, то все выражение в скобках останется положительно определенным в некоторой окрестности. По теореме Ляпунова, полная система неустойчива.

. Неустойчивость механических систем.

Для механических систем у нас есть уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial W}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} \ , \tag{247}$$

где T — кинетическая энергия системы, Φ — диссипативная функция Рэлея (квадратичная форма скоростей), W — обобщенный потенциал гироскопических сил, V — просто потенциал. Или короче

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} \ , \text{где } L = L_2 + L_1 + L_0. \tag{248}$$

Напомним, что $q = 0$ — равновесие системы, тогда и только тогда, когда $\left.\frac{\partial V}{\partial q_i}\right|_0 = 0$ (критическая точка). Критическая точка невырождена, если $\left|\frac{d^2V}{dq_i{}^2}q_j\right|_0 \neq 0$.

Движение только под действием потенциальных сил в первом приближении в нормальных координатах описывается так

$$\ddot{\xi}_i + \Lambda_i \xi_i = 0 \ . \tag{249}$$

Невырожденность критической точки равносильна тому, что все $\Lambda_i \neq 0$. Если $\Lambda_i > 0$ то будут нормальные колебания. Число отрицательных Λ_i называется *степенью неустойчивости*(по Пуанкаре).

Если к потенциальным силам добавить гироскопические и диссипативные, то уравнения движения в первом приближении будут выглядеть так

$$\ddot{\xi} + D\dot{\xi} + \text{diag}(\Lambda_1, ..., \Lambda_n)\xi = 0 \ ,$$

где D некоторая матрица. Весь смак в том, что неважно, какая она!!

Теорема 1. Если степень неустойчивости нечетная, то какие бы не были гироскопические и (или) диссипативные силы, равновесие останется неустойчивым в линейном приближении и для точных уравнений.

Доказательство: напишем характеристический многочлен системы уравнений движения

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda^2 + \Lambda_1 + \lambda d_{11} & & \lambda d_{ij} \\ & \lambda^2 + \Lambda_2 + \lambda d_{22} & \\ & ..... & \\ \lambda d_{ij} & & \lambda^2 + \Lambda_n + \lambda d_{nn} \end{vmatrix} = \lambda^{2n} + ... \tag{250}$$

смотрим $\Delta(0) = \Lambda_1 ... \Lambda_n < 0$, т.к. степень неустойчивости нечетная. А $\Delta(+\infty) > 0$ (рис. **??**). существует $\lambda > 0$. Следовательно, система неустойчива в любом приближении.

Теорема 2. Если степень неустойчивости четная, то после добавления одних только гироскопических равновесие может стать устойчивым.

Для доказательства требуется привести хотя бы один пример. Вот он

$$\begin{cases} \ddot{x} = \alpha x, \\ \ddot{y} = \beta y, \quad \alpha, \beta > 0. \end{cases}$$

Здесь будет наблюдаться экспоненциальный рост. Добавим гироскопические силы:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \alpha x + \nu \dot{y}, \\ \ddot{y} = \beta y - \nu \dot{x} \ . \end{cases}$$

Эта система уже устойчива при некоторых ν. Дополнительный вопрос на экзамене: "При каких именно?"

Теорема 3. Если помимо гироскопических сил (см. теорему 2) добавить силы с полной диссипацией, то останется неустойчивость (степень неустойчивости не важна!!!)

Доказательство. Будем применять вторую теорему Ляпунова о неустойчивости. Возьмем функцию Ляпунова $V = -H - \beta \sum \Lambda_i \xi_i \dot{\xi}_i$. Учитывая, что $\ddot{\xi}_i = -\Lambda_i \xi_i + ...$, найдем производную от функции Ляпунова:

$$\frac{dV}{dt} = 2\Phi - \beta \sum \Lambda_i \dot{\xi}_i^2 + \beta \sum \Lambda_i^2 \xi_i^2 + ... \tag{251}$$

Получаем, что третье слагаемое положительно определено по координатам, а первые два могут оказаться положительными, т.к. есть $\Lambda_i < 0$

83.. Физический маятник. Вывод уравнения движения пятью способами:

1. из общих теорем динамики (три варианта),
2. из уравнений Лагранжа,
3. из уравнений Гамильтона.

Физический маятник — это тело в вертикальной плоскости, закрепленное в одной точке.

«Три варианта» такие: (а) из теоремы об изменения момента относительно точки закрепления маятника, (б) из теоремы об изменения импульса и об изменении момента относительно центра масс (придется исключать реакцию), (в) из интеграла энергии.

Все остальное — самостоятельно. Очень рекомендуется для хорошего запоминания результата.

Для унификации обозначений: центр масс S находится на расстоянии l от неподвижной точки O, В точке O прямоугольная система координат Oxy, причем Oey идет вверх. OS отклоняется на угол φ от направления вниз, Масса тела M Момент инерции относительно точки S $I_S = M\rho^2$, где ρ — радиус инерции. Тогда

$$L = \frac{M}{2}(l\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}M\rho^2\dot{\varphi}^2 + Mgl\cos\varphi.$$

84.. Приведенная длина и взаимность точки подвеса и центра качания (теорема Гюйгенса).

Приведенная длина - это длина математического маятника, который движется так же, как рассматриваемый физический. Если ее отложить от точки подвеса в сторону центра масс, тот получится центр качания. Если теперь подвесить тело за него, движение будет таким же, как у исходного.

85.. Интегрирование задачи Кеплера в лагранжевых переменных.

В плоской задаче Кеплера при $m = 1$ лагранжиан , интеграл энегрии и циклический интеграл таковы:

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + \frac{\mu}{r}, \quad H = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - \frac{\mu}{r} = h, \ \dot{r}^2\dot{\varphi} = c.$$

Дальнейшее — как было в динамике точки.

86.. Интегрирование задачи Кеплера методом Гамильтона-Якоби.

Гамильтониан

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2r^2} - \frac{\mu}{r}.$$

Здесь отсутствует время и отделяются переменные p_φ, φ: $f \equiv p_\varphi$. Положим $f(P_2) = P_2$ (для циклических переменных это всегда подходит), $h(P) = P_1$.

$$S = F(\varphi, P_2) - P_1 t + \tilde{S}(r, P_1, P_2).$$

Тогда $\frac{\partial F}{\partial \varphi} = P_2 \Rightarrow F = P_2\varphi$ и

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial r}\right)^2 + \frac{P_2^2}{2r^2} - \frac{\mu}{r} = P_1, \tag{252}$$

$$\tilde{S} = \int\limits_{r(P)}^{r} \sqrt{2P_1 - \frac{P_2^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r}}\, dr, \tag{253}$$

$$S = P_2\varphi + \int\limits_{r(P)}^{r} \sqrt{2P_1 - \frac{P_2^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r}}\, dr. \tag{254}$$

Смешанные формулы канонического преобразования

$$p_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \varphi} = P_2, p_r = \frac{\partial S}{\partial r} = \sqrt{2P_1 - \frac{P_2^2}{r^2} + 2\frac{\mu}{r}}, \tag{255}$$

$$Q_1 = \frac{\partial S}{\partial P_1} = \int \frac{dr}{\sqrt{2P_1 - \frac{P_2^2}{r^2} + \frac{\mu}{r}}}, \tag{256}$$

$$Q_2 = \frac{\partial S}{\partial P_2} = \varphi + \int -\frac{P_2}{r^2}\frac{dr}{\sqrt{2P_1 - \frac{P_2^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r}}}. \tag{257}$$

Проведем анализ последней формулы. Подкоренное выражение представим в виде

$$2P_1 - \frac{P_2^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r} = 2P_1 + \frac{\mu^2}{P_2^2} - \left(\frac{P_2}{r} - \frac{\mu}{P_2}\right)^2.$$

Обязательно должно быть $2P_2 + \mu^2/P_2^2 \geqslant 0$. Положим

$$q = \frac{P_2}{r} - \frac{\mu}{P_2}, r = \frac{P_2}{\frac{\mu}{P_2} + q}.$$

Интегрировать удобно от $r_{\min}$, $q_{\max}$. Заметим, что $-\frac{P_2}{r^2}\, dr = dq$, так что наш интеграл приобретает вид

$$Q_2 = \varphi + \int\limits_{q_{\max}}^{q} \frac{dq}{\sqrt{2P_1 + \frac{\mu^2}{P_2^2} - q^2}},$$

и после замены $q = \sqrt{2P_1 + \mu^2/P_2^2}\,\sin\xi$ приходим к $Q = \varphi + \xi - \pi/2$. Поэтому

$$\xi = \frac{\pi}{2} + Q - \varphi, q = \sqrt{2P_1 + \frac{\mu}{P_2^2}}\,\cos(\varphi - Q_2), \tag{258}$$

$$r = \frac{P_2^2}{\mu} \Bigg/ \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2P_1P_2^2}{\mu^2}}\,\cos(\varphi - Q_2)\right]. \tag{259}$$

Получаем уравнение орбиты:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi - Q_2)}.$$

При этом мы выяснили смысл величины p: это радиус круговой орбиты с данной постоянной площадей P_2, причем в эллиптическом движении это расстояние достигается на угловом расстоянии $\pi/2$ от перицентра. Угол Q_2 есть полярный угол перицентра.

Формула, содержащая Q_1, может быть преобразована дальше вплоть то введение переменных действие-угол через так называемую эксцентрическую аномалию. На этом останавливаться не будем.

87.. Сферический маятник. Качественное исследование движения.

Точка движется по сфере в поле тяжести: $\mathfrak{M} = \{x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$, $\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{e}_z$. В сферических координатах θ и ψ

$$L = \frac{m}{2}\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz = T - V == \frac{mr^2}{2}\,(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\psi}^2) - mgr\cos\theta. \tag{260}$$

Интеграл энергии $H = T + V = mgrh_1$. В выражении L переменная ψ отсутствует. Отсюда

$$J = mr^2\sin^2\theta\dot{\psi} = mr^2c_1$$

(циклический интеграл). Видно, что при $c_1 \neq 0$ функция $\psi(t)$ монотонна. Найдем область возможности движения $\mathfrak{M}_c^h$, для этого исключим $\dot{\psi}$ из интегралов J и H:

$$\frac{mr^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \frac{c_1^2}{\sin^2\theta}\right) + mgr\cos\theta = mgrh_1,\ \ \mathfrak{M}_c^h = \left\{\frac{mr^2}{2}\,\frac{c_1^2}{\sin^2\theta} + mgr\cos\theta \leqslant mgrh_1\right\}.$$

В левой части неравенства стоит так называемый приведенный потенциал, в правой — энергия. Неравенство $V_c \leqslant h$ не содержит ψ и высекает отрезок по θ (который может выродиться в точку либо пустое множество):

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2g}{r}\,(h_1 - \cos\theta) - \frac{c_1^2}{\sin^2\theta}}.$$

Подкоренное выражение неотрицательно в точности на $\mathfrak{M}_c^h$. При движении φ растет, а θ колеблется в предписанных заданными c и h пределах. Траектория, вообще говоря, не замкнется. Похожее мы наблюдали в случае центрального поля сил.

88.. Волчок Эйлера

Вращается твердое тело с неподвижной точкой. Дано, что момент внешних сил равен 0.

$$\frac{d\boldsymbol{\Lambda}}{dt} = 0, \quad \frac{dT}{dt} = 0$$

Отсюда следует, что $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{const}$, $T = \mathrm{const}$.

Воспользуемся уравнениями Эйлера:

$$A\frac{dp}{dt}+(C-B)qr=0\ ,\quad B\frac{dq}{dt}+(A-C)rp=0\ ,\quad C\frac{dr}{dt}+(B-A)pq=0. \tag{261}$$

Первые интегралы для этой системы

$$\begin{cases} T=\frac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2)=h \\ \Lambda^2=A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2=2hD \end{cases} \tag{262}$$

Фиксируем $T=h$ и рассмотрим сужение функции $F=\Lambda^2$ на этом многообразии (рисуем уровни F на многообразии $T=h$). Для определенности будем считать, что $A<B<C$. Найдем критические точки F на $T=h$, применив уравнения Лагранжа с неопределенными множителями, и увидим, что возможны три случая:

1) $q=r=0,\ \ p=\pm\sqrt{\frac{2h}{A}},\ \ F=2hA$ — минимум.

2) $p=q=0,\ \ r=\pm\sqrt{\frac{2h}{C}},\ \ F=2hC$ — максимум.

3) $r=p=0,\ \ q=\pm\sqrt{\frac{2h}{B}},\ \ F=2hB$. Вблизи последней точки имеем $bq^2=2h-Ap^2-Cr^2$, так что

$$F=2hB+A(A-B)p^2+C(C-B)r^2$$

Второе слагаемое меньше нуля, а третье больше. Видим седловую точку.

Другие точки — максимумы или минимумы F на $T=h$.

Любое из уравнений (261) позволяет расставлять стрелки на фазовых траекториях.

Идея решения(261). Система (262) линейна относительно $p^2,\ q^2,\ r^2$. Выражаем из нее

$$q^2=\varphi(p^2,h,D)\ ,\ r^2=\psi(p^2,h,D)$$

и подставляем в $\dfrac{dp}{dt}=\frac{B-C}{A}qr$. В итоге получаем

$$\frac{dp}{dt}=\pm\frac{B-C}{A}\sqrt{\varphi}\sqrt{\psi}$$

89.. Перманентные вращения и регулярная прецессия в задаче Эйлера.

Если начальное значение угловой скорости направить по главной оси, то тело станет равномерно вращаться вокруг нее (*перманентное вращение*).

Пусть $A=B$ в случае Эйлера. Применяем теорему об изменении проекции кинетического момента на ось динамической симметрии:

$$C\frac{dr}{dt}=0$$

Следовательно, $r=\mathrm{const}$. Если вспомнить представление Пуансо, то получается *регулярная прецессия* вокруг вектора кинетического момента.

90.. Волчок Лагранжа. Вывод интегралов движения с помощью общих теорем динамики.

Волчок Лагранжа —это твердое тело

1) с неподвижной точкой;

2) динамически симметричное ($A=B$)

3) центр масс его находится на оси динамической симметрии.

Для определения ориентации тела воспользуемся углами Эйлера. Ось ζ направим вдоль оси динамической симметрии, осью ξ будет ось узлов, а η дополняет их до правой тройки. Главный репер при этом будет ориентирован следующим образом: вектор $\boldsymbol{e}_3$ направлен вдоль ζ и составляет угол θ (угол нутации) с осью z, вектор $\boldsymbol{e}_1$ имеет угол φ с осью ξ. Ось узлов ξ отклонена от первоначального положения $\boldsymbol{e}_1$ на угол ψ. Угловая скорость

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\xi + \dot{\psi}\boldsymbol{e}_z + \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\zeta\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\xi + \dot{\psi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\eta + (\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\boldsymbol{e}_\zeta.$$

В силу того, что $A = B$, репер $\boldsymbol{e}_\xi\boldsymbol{e}_\eta\boldsymbol{e}_\zeta$ является главным, хотя и нежестко связан с телом (он является главным в каждое мгновение времени). Правило вычисления $\boldsymbol{\Lambda}$ сохраняется:

$$\boldsymbol{\Lambda} = A\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\xi + A\dot{\psi}\sin\theta\boldsymbol{e}_\eta + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta)\boldsymbol{e}_\zeta \tag{263}$$

Поскольку сила тяжести вертикальна, а ее момент горизонтален, имеем

$$\Lambda_z = A\dot{\psi}\sin^2\theta + C(\dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi})\cos\theta = c \tag{264}$$

Из того, что центр масс находится на оси динамической симметрии, получаем

$$\Lambda_\zeta = C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta) = k \tag{265}$$

Наконец, из

$$\frac{dT}{dt} = (M\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v}_S) + (\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}_O) = -Mg\dot{z},$$

вытекает интеграл энергии

$$T + V = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\Lambda}) + Mgl\cos\theta = h \tag{266}$$

Зафиксируем произвольно c, k, h (из начальных условий). Найдем

$$\dot{\psi} = \frac{c - k\cos\theta}{A\sin^2\theta}, \quad \dot{\varphi} = \frac{1}{C}(k - C\dot{\psi}\cos\theta) \tag{267}$$

Подставим все в (266):

$$\frac{A}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{(c - k\cos\theta)^2}{2A\sin^2\theta} + Mgl\cos\theta = h - \frac{k^2}{2C} \tag{268}$$

Получили консервативную систему с одной степенью свободы:

$$\frac{A\dot{\theta}^2}{2} + V_{ck}(\theta) = h'$$

На интервале от 0 до π функция $V_{ck}(\theta)$ имеет только один минимум (максимумов не будет) — это надо доказать (потом). Инетгрированием последовательно находятся $\theta(t)$, $\psi(t)$, $\varphi(t)$.

91.. Волчок Лагранжа. Вывод интегралов движения с помощью теорем лагранжева формализма.

Ну что... $L = T - V$, интеграл Якоби-Пенлеве, который здесь просто интеграл энергии, циклические интегралы...

92.. Качественное исследование движения волчка Лагранжа. Типы поведения оси динамической симметрии.

Проследим за поведением оси динамической симметрии. Эта ось задается углами θ и ψ. Будем рисовать на единичной сфере траекторию конца вектора $\boldsymbol{e}_\zeta$.

Выясним область возможности движения для θ. Обозначим $u = \cos\theta$, $u \in (-1, 1)$. Запишем условие $V \leqslant h'$:

$$Mglu + \frac{(c-ku)^2}{2A(1-u)^2} \leqslant h' \iff f(u) = 2MglA(u^2-1)u + 2h'A(1-u^2) - (c-ku)^2 \geqslant 0 \tag{269}$$

Функция $f(u)$ является кубическим многочленом. На границах

$$f(\pm 1) = -(c-ku)^2 < 0$$

Возможны три случая: $M_{c,k,h'}$ — отрезок, $M_{c,k,h'}$ — точка (регулярная прецессия), $M_{c,k,h'}$ — пустое множество.

Движение будет происходить в полосе между θ_1 и θ_2 на сфере. Возможны три случая:

а) Если $c - k\cos\theta$ сохраняет знак и нигде не равен нулю на $[\theta_1, \theta_2]$, то ψ монотонна.

б) Если $\dot\psi$ меняет знак, тогда конец вектора рисует траекторию с петлями.

в) Промежуточный случай: если $\dot\psi = 0$ на границе.

Надо доказать, что если $\dot\psi = 0$ на границе, то только на верхней. Функция $\dot\psi = 0$ только тогда, когда $\cos\theta' = c/k$. Выясним расположение точки θ', для этого возьмем производную

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\theta'} = -Mgl\sin\theta' + (c - k\cos\theta')(\ldots) = -Mgl\sin\theta' < 0 \tag{270}$$

Отсюда следует, что θ' находится левее минимума и если попадает на границу, то только на верхнюю.

93.. Регулярные прецессии.

Регулярная прецессия возникает тогда, когда $\theta = \text{const}$, $\dot\psi = \text{const}$, $\dot\varphi = \text{const}$. Рассмотрим теорему об изменении кинетического момента, относительно неподвижной точки, когда действует только сила тяжести:

$$\frac{d\boldsymbol{\Lambda}}{dt} = [l\boldsymbol{e}_\zeta \times -Mg\boldsymbol{e}_z] = Mgl\,[\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_\zeta]$$

Вычислим левую и правую части для случая регулярной прецессии:

$$\begin{gathered}\frac{d\boldsymbol{\Lambda}}{dt} = A\dot\psi\sin\theta\dot{\boldsymbol{e}}_\eta + C(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta)\dot{\boldsymbol{e}}_\zeta = \\ = -A\dot\psi^2\sin\theta\cos\theta\boldsymbol{e}_\xi + C(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta)\sin\theta\dot\psi\boldsymbol{e}_\xi\end{gathered}$$

Последнее равенство было получено с учетом того, что

$$\dot{\boldsymbol{e}}_{\eta,\zeta} = \left[\dot\psi\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_{\eta,\zeta}\right]$$

Теперь получаем, что

$$\dot\psi\sin\theta\left((C-A)\cos\theta\dot\psi + C\dot\varphi\right)\boldsymbol{e}_\xi = Mgl\sin\theta\boldsymbol{e}_\xi$$

Случаи, когда $\theta = 0$ или $\theta = \pi$, не интересны (равномерное вращение). Пусть $0 < \theta < \pi$, тогда

$$\dot\psi\left((C-A)\cos\theta\dot\psi + C\dot\varphi\right) = Mgl$$

По наклону и скорости прецессии находим собственное вращение:

$$C\dot{\varphi} = \frac{Mgl}{\dot{\psi}} + (A - C)\cos\theta\dot{\psi} \tag{271}$$

Если задать угловую скорость, можно найти угол наклона

$$\cos\theta = \frac{Mgl - C\dot{\varphi}\dot{\psi}}{(C - A)\dot{\psi}^2} \tag{272}$$

94.. Волчок Лагранжа. Приведение по Раусу.

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2}[A\dot{\theta}^2 + A\dot{\psi}^2\sin\theta + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}cos\theta)]$$

Заметим, что $\frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}} = 0, \frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = 0$. Если применять обозначения общей теории, то $x_1 = \theta, \xi_2 = \psi, \xi_3 = \varphi$.

Выражения для элементарной работы и угловой скорости дают следующее:

$$\delta A = (\boldsymbol{G}_0, \boldsymbol{\delta\omega}), \quad \boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\boldsymbol{e}_z + \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \dot{\theta}\boldsymbol{e}_\perp \Rightarrow \delta A = (\boldsymbol{G}_0, \boldsymbol{e}_z)\delta\psi + (\boldsymbol{G}_0, \boldsymbol{e}_\gamma)\delta\varphi + (\boldsymbol{G}_0, \boldsymbol{e}_\perp)\delta\theta$$

Теперь $(\boldsymbol{G}_0, \boldsymbol{e}_z) = Q_\psi = Q_2, (\boldsymbol{G}_0, \boldsymbol{e}_\rho) = Q_\varphi = Q_3, (\boldsymbol{G}_0, \boldsymbol{e}_\perp) = Q_\theta = Q_1$.

Нам нужно, чтобы было (предположение 2 общей теории) $Q_\psi = Q_\varphi = 0$ Простейший случай - момент силы тяжести, когда центр масс лежит на оси динамической симметрии: $L = T + Mgl\cos\theta$.

Будем искать $R_c = \nu - \frac{1}{2}(N^{-1}(c - n), c - n)$, исключая ψ, φ: тогда $\nu = \frac{A}{2}\dot{\theta}^2 - Mgl\cos\theta$,

$$N = \begin{Vmatrix} A\sin^2\theta + C\cos^2\theta & C\cos\theta \\ C\cos\theta & C \end{Vmatrix}, \quad N^{-1} = \frac{1}{AC\sin^2\theta}\begin{Vmatrix} C & -C\cos\theta \\ -C\cos\theta & A\sin^2\theta + C\cos^2\theta \end{Vmatrix}$$

Функция Рауса:

$$R_{\text{ck}} = \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 - Mgl\cos\theta - \frac{1}{2}\frac{(c - k\cos\theta))^2}{A\sin^2\theta} - \frac{k^2}{2C}$$

Последние 3 слагаемых без минуса — приведенный потенциал $V_{ck}(\theta)$.

Исключаем только φ :

$$R_k = \frac{A}{2}(\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2\sin^2\theta) - Mgl\cos\theta + k\dot{\psi}\cos\theta$$

С точностью до переобозначений, это функция Лагранжа сферического маятника дополнительными линейными по скоростям слагаемыми.

95.. Задача о движении электрона по сфере в поле магнитного заряда и постоянном электрическом поле как приведенная система для волчка Лагранжа.

Сила Лоренца здесь

$$\boldsymbol{F} = \frac{q}{c}\left[\dot{\boldsymbol{r}} \times \frac{\mu}{\boldsymbol{r}^3}\right], \quad (\boldsymbol{E} = 0, \boldsymbol{B} = \frac{\mu}{c}\boldsymbol{e}_r).$$

Элементарная работа по определению равна:

$$\delta A = (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{\delta r}), \quad \dot{\boldsymbol{r}} = \dot{r}\boldsymbol{e}_r + r\dot{\theta}e_\theta + r\sin\theta\dot{\psi}\boldsymbol{e}_\psi \Rightarrow \boldsymbol{\delta r} = \delta r\boldsymbol{e}_r + r\delta\theta\boldsymbol{e}_\theta + r\sin\theta\delta\psi\boldsymbol{e}_\psi$$

Теперь

$$F = \frac{q}{c}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & \boldsymbol{e}_\theta & \boldsymbol{e}_\varphi \\ \dot{r} & r\dot{\theta} & r\sin\theta\dot{\psi} \\ \frac{\mu}{r^2} & 0 & 0 \end{vmatrix} == \frac{\mu}{c}\frac{1}{r^2}\sin\theta\dot{\varphi}r\boldsymbol{e_\theta} - \frac{q\mu}{c}\frac{1}{r^2}r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\varphi$$

Получаются обобщенно-потенциальные силы:

$$\delta A = \frac{\mu q}{c}[\sin\theta\dot{\psi}\delta\psi - \sin\theta\dot{\theta}\delta\psi] = \boldsymbol{\delta}\left[\frac{\mu q}{c}\cos\theta\dot{\psi}\right].$$

Запишем лагранжиан движения в поле магнитного заряда:

$$L = \frac{m}{2}[r^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\psi}^2] - \frac{\mu q}{c}\cos\theta\dot{\psi}$$

и наложим связь $r = const$:

$$L = \frac{mr^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\psi}^2) + \frac{\mu q}{c}\cos\theta\dot{\psi}$$

Осталось это сравнить с фукнцией Рауса волчка Лагранжа после исключения только угла прецессии.

96.. Плоская ограниченная круговая задача трех тел.

Две массы $m_1 = M - \mu$ и $m_2 = \mu$ движутся в согласии с законом тяготения Ньютона (задача двух тел). Кроме того, в пространстве имеется еще третья масса $m_3 = m$, которая находится под действием сил притяжения к первым двум телам, но сама влияния на них не оказывает (например, случай системы Земля–Луна–спутник). Смысл слов «ограниченная» состоит именно в этом. Уравнения движения массы m имеют вид

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -f\frac{m(M-\mu)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1(t)|^3}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1(t)) - f\frac{m\mu}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2(t)|^3}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2(t)),$$

где изменение $\boldsymbol{r}_1(t)$, $\boldsymbol{r}_2(t)$ нам известно. Поскольку уравнения движения можно сократить на m, в дальнейшем считаем $m = 1$.

В инерциальной системе координат, связанной с центром масс точек m_1 и m_2, эти точки движутся в постоянной плоскости по кеплеровским орбитам: окружностям, эллипсам, параболам, гиперболам или прямым. Будем рассматривать только первый случай: тогда говорят о круговой ограниченной задаче трех тел. Кроме того, будем рассматривать только те движения единичной массы, которые лежат в плоскости орбит m_1, m_2. Итак, в плоскости OXY вокруг точки O вращаются две массы μ и $M - \mu$ с угловой скоростью ω; они притягивают третью, единичную массу, по закону тяготения Ньютона. Требуется исследовать движения этой массы.

Угловая скорость вращения $\omega = \omega(M, \mu, r, \rho, f)$, причем величины M, r, f размерно независимы: $[f] = \mathrm{L}^3/\mathrm{T}^2\mathrm{M}$. Отсюда

$$\omega = \sqrt{\frac{fM}{r^3}}\,\bar{\omega}\left(\frac{\mu}{M}, \frac{\rho}{r}\right).$$

Впредь мы можем принимать $M = r = f = 1$. Покажем, что тогда $\omega = \bar{\omega} \equiv 1$. Введем подвижную систему координат Oxy с началом в центре масс и вращающуюся с угловой скоростью ω. Относительно нее каждая из масс $M - \mu$, μ находится в равновесии, т. е. переносная сила инерции уравновешивается гравитационной:

$$\mu\omega^2(1-\rho) = \mu(1-\mu), \quad (1-\mu)\omega^2\rho = \mu(1-\mu).$$

Отсюда

$$\mu(1-\rho) = (1-\mu)\rho$$

(это означает, что центр масс — в начале координат), так что

$$\rho = \mu, \bar{\omega} = 1.$$

Лагранжиан $L = T - V$ выпишем в подвижной системе координат:

$$T = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{v}^2_{\text{абс}} = \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{v}_{\text{отн}} + [\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{r}])^2 = \frac{1}{2}\,((\dot{x} - y)^2 + (\dot{y} + x)^2), \tag{273}$$

$$V = -\frac{1-\mu}{\sqrt{(\mu + x)^2 + y^2}} - \frac{\mu}{\sqrt{(1 - \mu - x)^2 + y^2}} = -\frac{1-\mu}{R_1} - \frac{\mu}{R_2}, \tag{274}$$

$$L = \frac{1}{2}\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + (x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{1}{2}\,(x^2 + y^2) - V. \tag{275}$$

Уравнения движения имеют следующий вид (мы получили автономную обобщенно-натуральную систему):

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} + \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} + \frac{\partial W}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

где $W = V - (x^2 + y^2)/2$. Отсюда положения относительного равновесия (в инерциальной системе координат им соответствуют движения по окружности) определяются из системы уравнений $\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial y} = 0$. Произведем вычисления:

$$\frac{\partial W}{\partial y} \equiv -y + \frac{1-\mu}{R_1^3}\,y + \frac{\mu}{R_2^3}\,y \equiv y f(x, y) = 0, \tag{276}$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} \equiv -x + \frac{(1-\mu)(x+\mu)}{R_1^3} + \frac{\mu(x - 1 + \mu)}{R_2^3} = \tag{277}$$

$$= x f(x, y) + \mu(1-\mu)\left(\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_2^3}\right) = 0. \tag{278}$$

97.. Точки либрации и их устойчивость.

Положения относительного равновесия в этой задаче (критические точки W) называются точками либрации. Они могут быть двух типов:

а) Коллинеарные точки либрации L_1, L_2, L_3 (точки Эйлера): $y = 0$. Тогда для нахождения нужных значений x надо определить точки экстремума функции

$$W(x, 0) = -\frac{1}{2}\,x^2 - \frac{1-\mu}{|x+\mu|} - \frac{\mu}{|x - 1 + \mu|}.$$

Таких точек ровно три, что легко увидеть из графика и доказать, если надо, аккуратно (функция простая; в частности, она выпукла на каждом интервале непрерывности).

б) Треугольные точки либрации L_4, L_5 (точки Лагранжа): $y \neq 0$. Тогда из первого уравнения следует $f = 0$, а из второго — $R_1 = R_2$, т. е. единичная масса составляет с притягивающими равносторонний треугольник. Координаты такой точки либрации:

$$x = \frac{1}{2} - \mu, y = \pm\sqrt{3}/2.$$

Произведем линеаризацию в окрестности точки либрации, для чего положим $x = x_* + \xi$, $y = y_* + \eta$. Тогда уравнения движения в первом приближении получат вид

$$\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} + \left.\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right|_* \xi + \left.\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right|_* \eta = 0, \tag{279}$$

$$\ddot{\eta} + 2\dot{\xi} + \left.\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x}\right|_* \xi + \left.\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right|_* \eta = 0. \tag{280}$$

Им можно придать форму

$$A \begin{pmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \end{pmatrix} + 2\Theta \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = 0.$$

Нас интересует только вопрос об устойчивости равновесий в первом приближении.

А. Коллинеарные точки либрации:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = 0, \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = b > 0, \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = a < 0,$$

так что уравнения первого приближения суть

$$\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} + a\xi = 0, \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} + b\eta = 0$$

характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + a & -2\lambda \\ 2\lambda & \lambda^2 + b \end{vmatrix} = \lambda^4 + (a + b + 4)\lambda^2 + ab = 0.$$

Откуда $(\lambda^2)_1$, $(\lambda^2)_2$ действительны и имеют разные знаки, так как в силу $ab < 0$ дискриминант соответствующего квадратного уравнения положителен, а произведение корней отрицательно. Следовательно, имеются два действительных собственных значения, например, $\pm\lambda_1$, одно из которых положительно, что доказывает неустойчивость.

Б. Треугольные точки либрации: для определенности пусть

$$x = \frac{1}{2} - \mu + \xi, y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \eta.$$

Каждое слагаемое функции W разложим в ряд Тейлора, но выписывать будем лишь члены второго порядка по ξ, η. Имеем для третьего слагаемого

$$-\frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \ldots - \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2).$$

Далее будем в очередной раз использовать формулу

$$(1 + \chi)^{-1/2} = 1 - \frac{\chi}{2} + \frac{3}{8}\chi^2 + O(\chi^3).$$

Первое слагаемое гравитационного потенциала разложится так:

$$-\frac{1-\mu}{R_1} = -\frac{1-\mu}{\sqrt{\left(\frac{1}{2} + \xi\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \eta\right)^2}} = \tag{281}$$

$$= -\frac{1-\mu}{\sqrt{1 + \xi + \sqrt{3}\,\eta + \xi^2 + \eta^2}} = \ldots + \frac{1-\mu}{2}(\xi^2 + \eta^2) - \tag{282}$$

$$-\frac{3}{8}(1-\mu)(\xi + \sqrt{3}\,\eta)^2 + \ldots. \tag{283}$$

Аналогично второе:

$$-\frac{\mu}{R_2} = -\frac{\mu}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2} + \xi\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \eta\right)^2}} = \tag{284}$$

$$= -\frac{\mu}{\sqrt{1 - \xi + \sqrt{3}\,\eta + \xi^2 + \eta^2}} = \tag{285}$$

$$= \ldots + \frac{\mu}{2}(\xi^2 + \eta^2) - \frac{3}{8}\mu(-\xi + \sqrt{3}\,\eta)^2 + \ldots. \tag{286}$$

Складывая все три формулы, получаем

$$W = \ldots - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}(\xi^2 + 2(1 - 2\mu)\sqrt{3}\,\xi\eta + 3\eta^2).$$

Отсюда уравнения первого приближения:

$$\ddot{\xi} - 2\dot{\eta} - \frac{3}{4}\,\xi - \frac{\sqrt{27}}{4}\,(1-2\mu)\eta = 0, \tag{287}$$

$$\ddot{\eta} + 2\dot{\xi} - \frac{\sqrt{27}}{4}\,(1-2\mu)\xi - \frac{9}{4}\eta = 0. \tag{288}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - 3/4 & -2\lambda - \frac{\sqrt{27}}{4}\,(1-2\mu) \\ 2\lambda - \frac{\sqrt{27}}{4}\,(1-2\mu) & \lambda^2 - 9/4 \end{vmatrix} = \tag{289}$$

$$= \lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\,\mu(1-\mu) = 0. \tag{290}$$

Его дискриминант равен $1 - 27\mu(1-\mu)$; если он положителен, то оба корня квадратного уравнения отрицательны, и имеем устойчивость. В противном случае чисто мнимых корней мы не получим. Итак, условие устойчивости

$$\mu(1-\mu) < \frac{1}{27}.$$

Это значит, что μ (или $1-\mu$) довольно мало, примерно $< 0{,}04$ (в общем случае отношение приведенной массы к суммарной $< 1/27$).

98.. Области Хилла.

Лагранжиан от времени не зависит. Интеграл типа энергии

$$H = \frac{1}{2}\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + W = h.$$

При каждом фиксированном h на плоскости Oxy выделяется область Хилла $\{W(x,y) \leqslant h\}$ (область возможности движения), граница которой называется кривой Хилла (в этой задаче). Число кривых Хилла и их расположение меняются, когда h пересекает одно из критических значений функции $W(L_i)$. Нетрудно показать, что всегда

$$W(L_1) < W(L_2), W(L_3) < W(L_4) = W(L_5).$$

Из наших вычислений вторых производных в точках либрации вытекает, что L_1, L_2, L_3 являются седлами, L_4, L_5 — симметричными максимумами. Кроме того, $W \to -\infty$, когда (x,y) стремится к одной из притягивающих точек или к бесконечности. Таким образом, график W можно представить себе как большую параболоидальную гору, вблизи вершины которой образовались две бесконечно глубокие воронки. При $h > W(L_{4,5})$ область Хилла совпадает со всей плоскостью (за вычетом притягивающих масс). О том, как движется единичная масса в областях Хилла, на элементарном уровне сказать ничего нельзя.

99.. Постановка задачи N тел. Первые интегралы движения.

Пусть точки m_ν взаимодействуют по закону всемирного тяготения:

$$\boldsymbol{f}_{\nu\varkappa} = -f\frac{m_\nu m_\varkappa}{|\boldsymbol{r}_\nu - \boldsymbol{r}_\varkappa|^2}\,(\boldsymbol{r}_\nu - \boldsymbol{r}_\varkappa), \boldsymbol{F}_\nu = \sum_{\varkappa\neq\nu} \boldsymbol{f}_{\nu\varkappa}.$$

Выполняется третий закон Ньютона: $\boldsymbol{f}_{\nu\varkappa} = -\boldsymbol{f}_{\varkappa\nu}$.

В задаче N тел имеются такие интегралы: импульс $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y, p_z)$, момент $\boldsymbol{\Lambda}_O = (\Lambda_x, \Lambda_y, \Lambda_z)$, энергия $H = T + V = h$, где $V = -\sum f \frac{m_\nu m_\varkappa}{|\boldsymbol{r}_\nu - \boldsymbol{r}_\varkappa|}$. Интегралов всего семь. При $N > 2$ их меньше, чем число степеней свободы $(3N)$. При $N = 2$ положим

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1,\ m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

и получим уравнение

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -\frac{\partial V(\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}},\ V(\boldsymbol{r}) = -f\frac{m_1 m_2}{|\boldsymbol{r}|},$$

т. е. задача двух тел сводится к задаче Кеплера. Всюду дальше $N \geqslant 3$.

100.. Формула Лагранжа.

Используем систему координат Кенига, которая в этой задаче является инерциальной (центр масс движется равномерно и прямолинейно: $\boldsymbol{p} = \mathrm{const}$). Иначе говоря, мы считаем, что

$$\sum_\nu m_\nu \boldsymbol{r}_\nu = 0,\ \boldsymbol{P} = 0.$$

Лемма 1. Полный барицентрический момент системы

$$I = \sum_\nu m_\nu \boldsymbol{r}_\nu^2 = \frac{1}{M}\sum_{\nu,\varkappa} m_\nu m_\varkappa (\boldsymbol{r}_\nu - \boldsymbol{r}_\varkappa)^2$$

(тождество Лагранжа). В самом деле,

$$MI = MI - \left(\sum_\nu m_\nu \boldsymbol{r}_\nu\right)^2 = \left(\sum_\nu m_\nu\right)\left(\sum_\nu m_\nu \boldsymbol{r}_\nu^2\right) - \left(\sum_\nu m_\nu \boldsymbol{r}_\nu\right)^2.$$

Легко убедиться, что коэффициенты при $m_\nu m_\varkappa$ в этом выражении всегда равны $(\boldsymbol{r}_\nu - \boldsymbol{r}_\varkappa)^2$.

Лемма 2 (формула Лагранжа). Вдоль движений

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = -2V + 4h.$$

Действительно, непосредственное дифференцирование дает

$$\frac{dI}{dt} = 2\sum_\nu m_\nu (\boldsymbol{r}_\nu, \dot{\boldsymbol{r}}_\nu), \tag{291}$$

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = 2\sum_\nu m_\nu (\boldsymbol{r}_\nu, \ddot{\boldsymbol{r}}_\nu) + 2\sum m_\nu \dot{\boldsymbol{r}}_\nu^2 = -2\sum_\nu \left(\boldsymbol{r}_\nu, \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}_\nu}\right) + 4T. \tag{292}$$

Если $F(z)$ — однородная функция от z степени n, $F(\lambda z) = \lambda^n F(z)$, то $\sum z_\alpha \frac{\partial F}{\partial z_\alpha} = nF$. Применяя этот факт к потенциалу, степень однородности которого равна -1, получаем

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = 2V + 4T = 4h - 2V.$$

101.. Треугольные лагранжевы решения неограниченной задачи трех тел.

Пусть заданы три тела с массами m_1, m_2, m_3, радиусами-векторами $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$ и S - центр масс этой системы; Для $\nu -$ ой точки запишем уравнение движения: $m_\nu \boldsymbol{a}_\nu = \boldsymbol{F}_\nu$. Все $\boldsymbol{r}_\nu$ поворачиваются с постояной угловой скоростью Ω , поэтому уравнение движения примет вид:

$$-m_\nu \Omega^2 \boldsymbol{r}_\nu = -\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \tag{293}$$

Так как $\boldsymbol{r}_\nu = \frac{1}{2}\frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu^2}{\partial \boldsymbol{r}_\nu}$, то (293) перепишется:

$$-\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_\nu}(\Omega^2 \frac{1}{2}\sum m_\nu \boldsymbol{r}_\nu^2) = -\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} \tag{294}$$

Так как по формуле Лагранжа

$$\frac{\partial I}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_\nu}(\frac{1}{M}\sum_{\nu,\varkappa;\nu<\varkappa} m_\nu m_\varkappa (\boldsymbol{\rho}_\nu - \boldsymbol{\rho}_\varkappa)^2) = \frac{1}{2M}\sum_{\varkappa;\varkappa\neq\nu} m_\nu m_\varkappa (\boldsymbol{r}_\nu - \boldsymbol{r}_\varkappa)$$

и

$$-\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{r}_\nu} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_\nu}(-f\sum_{\nu,\varkappa;\nu<\varkappa} m_\nu m_\varkappa \frac{1}{|\boldsymbol{r}_\nu - \boldsymbol{r}_\varkappa|}) = \sum_{\varkappa;\varkappa\neq\nu} \boldsymbol{f}_{\varkappa\nu},$$

получаем из (293):

$$\frac{1}{M}\Omega^2 \sum m_\nu m_\varkappa (\boldsymbol{r}_\nu - \boldsymbol{r}_\varkappa) = \boldsymbol{f}_{\nu\varkappa} = f\sum \frac{m_\nu m_\varkappa}{|\boldsymbol{r}_\nu - \boldsymbol{r}_\varkappa|^2}(\boldsymbol{r}_\nu - \boldsymbol{r}_\varkappa)$$

Пусть $|\boldsymbol{r}_\nu - \boldsymbol{r}_\varkappa| = d$, тогда $\Omega^2 = \frac{fM}{d^3}$

Аналог эйлеровых решений ограниченной задачи тоже существует.

102.. Достаточное условие ограниченности движений в задаче трех тел (теорема Якоби).

Назовем движение в задаче N тел *планетарным*, если нет столкновений и попарные расстояния ограничены на всей оси времени t.

Теорема Якоби. *Планетарное движение возможно только при отрицательной константе интеграла энергии*: $h < 0$.

Доказательство теоремы. Пусть движение планетарное и $h \geqslant 0$. Тогда $\frac{d^2 I}{dt^2} > 4h$ (потенциал V всюду строго отрицателен); следовательно, I — функция, строго выпуклая вниз. Но любая такая функция стремится к бесконечности при $t \to \infty$ или $t \to -\infty$, откуда в силу леммы 1 вытекает неограниченность попарных расстояний, и получаем противоречие.

Замечание. В задаче трех тел тройные столкновения возможны лишь при $\boldsymbol{\Lambda} = 0$ (теорема Вейерштрасса; без доказательства).

103.. Взаимозависимость движения тела относительно центра масс и орбитального движения.

Суть дела уже станет понятна, если вычислить силу, действующую на центр масс гантели в поле тяготения точки, в двух положениях: когда направление на точку и гантель параллельны и когда перпендикулярны. Длина гантели мала по сравнению с рассотоянием до точки.

104.. Ограниченные постановки задач. Вращение твердого тела на круговой орбите, положения относительного равновесия тела.

В произвольной системе координат

$$V(\boldsymbol{r}) = \sum_\nu -\frac{f\mu m\nu}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_\nu|} = -f\mu \sum_\nu \frac{m_\nu}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_\nu|}$$

$M = \sum m_\nu$, и $R-$ характерный размер тела (диаметр). Будем раскладывать в ряд по величине $\frac{R}{r}, R \ll r$. Возьмем систему координат с началом в центре масс и осями x, y, z, направленными по главным центральным осям, напишем

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R}\left(\frac{R}{r}\right).$$

Утверждение:

$$V = -\frac{f\mu M}{r}\left[1 + \frac{1}{2}\left[\frac{C+B-2A}{MR^2}\alpha^2 + \frac{A+C-2B}{MR^2}\beta^2 + \frac{B+A-2C}{MR^2}\gamma^2\right]\left(\frac{R}{r}\right)^2\right] + O\left(\left(\frac{R}{r}\right)^4\right)$$

Это известно.

ЗАДАЧА. Есть земля и ее спутник. Центр масс движется по орбите, которая нам известна, мы исследуем только вращение (строго это утверждение не верно, но в приближенно приемлемо).

Точнее, вокруг тела массы M по круговой орбите движется спутник с центром масс S, на расстоянии d, с угловой скоростью

$$\Omega = \sqrt{\frac{f\mu}{d^3}}$$

Введем орбитальную систему координат ($\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_x || \boldsymbol{v}_S$). главный центральный репер $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$.

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ТЕЛА В ПОЛЕ ТОЧКИ ТАКАЯ ЖЕ, КАК ТОЧКИ В ПОЛЕ ТЕЛА:

$$V = -\frac{f\mu}{r}\left(1 + \frac{A+B+C}{2}\left(\frac{1}{r}\right)^2 - \frac{3}{2}\left(A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2\right)\frac{1}{r^2} + O\left(\frac{R}{r}\right)^4\right)$$

Движение по окружности: $\frac{1}{r} = \text{const}$, $\frac{f\mu}{r^3} = \Omega^2$, $\boldsymbol{r} = r(\alpha\boldsymbol{e}_1 + \beta\boldsymbol{e}_2 + \gamma\boldsymbol{e}_3)$,

$$V = const + \frac{3}{2}\Omega^2(A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2), \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Мы знаем, что $T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$, где $p, q, r-$ компоненты абсолютной угловой скорости в главном репере. У нас, однако

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{абс}} = \boldsymbol{\omega}_{\text{отн}} + \boldsymbol{\omega}_{\text{пер}} = \Omega\boldsymbol{e}_z + p\boldsymbol{e}_1 + q\boldsymbol{e}_2 + r\boldsymbol{e}_3,$$

Положим $\boldsymbol{e}_z = u\boldsymbol{e}_1 + v\boldsymbol{e}_2 + w\boldsymbol{e}_3, u^2 + v^2 + w^2 = 1$. Тогда

$$T = T_2 + T_1 + T_0 = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + \Omega(Apu + Bqv + Cwr) + \frac{\Omega^2}{2}(Au^2 + Bv^2 + Cw^2)$$

Лагранжиан $L = T_2 + T_1 + T_0 - V$. Введем *измененную потенциальную энергию* $W = -T_0 + V$.

Хотя переменных в измененной потенциальной энергии шесть, независимых из них только три; помимо уже отмеченных единичных сумм квадратов, есть зависимость, выражающая ортогональность участвующих векторов:

$$\boldsymbol{e}_z \perp \boldsymbol{e}_y \Longleftrightarrow \alpha u + \beta v + \gamma w = 0.$$

105.. Измененная потенциальная энергия первого приближения для относительного равновесия тела на круговой орбите. Заведомо устойчивые и заведомо неустойчивые положения относительного равновесия тела на орбите.

Положение тела, в котором $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_z$ является относительным равновесием.

В самом деле, из

$$\lambda^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \quad u^2 + v^2 + w^2 = 1, \quad \alpha u + \beta v + \gamma w = 0$$

Для γ и v вблизи единицы α, β и u, w – малы :

$$\gamma^2 = 1 - \alpha^2 - \beta^2, \quad v^2 = 1 - u^2 - w^2, \quad \beta + w = ()^2.$$

$$W = \frac{1}{2}\Omega^2(3(A-C)\alpha^2 + 4(B-C)\beta^2 + (B-A)u^2)$$

Именно α, β, u независимы вблизи рассматриваемой точки, и W раскладывается по квадратам малых величин; имеет, следовательно, особую точку.

Если W имеет минимум, то равновесие будет устойчиво

$$A - C > 0, B - C > 0, B - A > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad B > A > C$$

Эллипсоид инерции $A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1$ отслеживает форму тела, вытянут в ту же сторону и сплюснут так же.

Устойчивое положение человека на орбите: ногами (или головой) к Земле, руки по направлению орбиты.

106.. Лагранжиан первого приближения для относительного равновесия тела на круговой орбите.

Вспоминаем уравнения Пуассона:

$$\dot\alpha = r\beta - q\gamma, \dot\beta = p\gamma - r\alpha, \dot\gamma = q\alpha - q\beta, \qquad \dot u = rv - qw, \dot v = pw - ru, \dot w = qu - qv.$$

Выпишем кинетическую энергию в первом приближении: в ней должны стоять только квадраты малых величин α, β, u. Но у нас есть места, где примерно единица множится на малую величину; тогда последнюю нельзя брать только в линейном приближении, а следует посмотреть на старшие члены. Примотревшись, видим, что следует обратить внимание на формулу ортогональности: она примет вид $\beta + w + \alpha u + [\geqslant 3] = 0$ или в достаточном приближении $\beta + w + \alpha u = 0$. Аналогично

$$\dot\alpha = r\beta - g\gamma = q + r\beta + [\geqslant 3], \dot\beta = p\gamma - r\alpha = p - r\alpha + [\geqslant 3], \dot u = rv - qw = r + q\beta + [\geqslant 3].$$

Применяя еще и калибровку $(x\dot y = \frac{1}{2}x\dot y + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(xy) - \frac{1}{2}y\dot x)$, получаем

$$T_1 = \Omega(A\dot\beta u + B(-\dot\alpha + r\beta) - C\dot u\beta) = \Omega(A\dot\beta u + (B-C)\dot u\beta) - B\dot\alpha = \frac{\Omega}{2}(A + C - B)(\text{г}\dot\beta - \beta\dot u)$$

Лагранжиан линейного приближения

$$L = \frac{1}{2}(A\dot\beta^2 + B\dot\alpha^2 + C\dot u^2) + \frac{\Omega^2}{2}(A + C - B)(u\dot\beta - \beta\dot u) - \frac{\Omega^2}{2}(3(A-C)\alpha^2 + 4(B-C)\beta^2 + (B-A)u^2).$$

107.. Отделение уравнений плоских колебаний. Частота плоских колебаний.

Поскольку $L = L'(\dot\alpha, \alpha) + L''(\dot u, \dot\beta, u, \beta)$, уравнение для α отделяются

$$B\ddot\alpha + 3\Omega^2(A - C)\alpha = 0$$

Это колебания в плоскости орбиты, если остальные переменные в состоянии покоя. Частота колебвний $\omega = \Omega\sqrt{\frac{3(A-C)}{B}}$.

Уравнения для β, u относятся к движению с двумя степенями свободы.

Примечания