Оглавление

Основные знания и навыки, ожидаемые от студентов-механиков на зачете и (или) экзамене по теоретической механике после 4-го семестра (с учетом курса общей физики и дифференциальных уравнений): студенту предстоит, не забывая основного материала первого семестра,

(I) уметь переходить от векторного уравнения Ньютона к системам дифференциальных уравнений в декартовых и полярных (цилиндрических) координатах; уметь вычислять силы инерции при переходе к равномерно вращающейся системе координат, знать формулу для веса, качественные эффекты падения тел и колебания маятника Фуко;

(II) знать размерности основных физических величин и констант, применять соображения размерности и П-теорему, в том числе для сокращения выкладок;

(III) знать основные эффекты движения заряда в постоянном магнитном поле (покой, движение по окружности, по прямой и «в общем случае» по винтовой линии); уметь получать выводы о движении заряда после добавления постоянного электрического поля;

(IV) уметь решать до конца, графически и качественно исследовать различные варианты (выделяя среди них грубые и негрубые) линейного уравнения второго порядка

$$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x}$$

понимая его и в физическом смысле, и как тривиальное приближение для уравнений Ньютона вида $m\ddot{x} = F(x, \dot{x})$ вблизи равновесия;

(V) для последних уравнений знать общие свойства фазовых траекторий (на фазовой плоскости $(x, \dot{x})$; выделять среди них равновесия, применять классификацию Пуанкаре особых точек, разпознавать среди них грубые (седла, узлы и фокусы) и негрубые (центры), понимать поведение траекторий вблизи равновесий, находить сепаратрисы седел и максимально продолжать их;

(VI) в частности, быстро получать следующие фазовые портреты:

(1) движение по инерции;

(2) движение под действием только вязкого трения;

(3) движение в поле тяжести (на основе общего решения линейного уравнения);

(4) движение в поле тяжести (на основе интеграла энергии);

(5) движение в поле тяжести с вязким трением;

(6) гармонический осциллятор (на основе общего решения);

(7) гармонический осциллятор (на основе интеграла энергии);

(8) гармонический осциллятор с небольшим вязким трением;

(9) гармонический осциллятор с большим вязким трением;

(10) движение с линейной отталкивающей силой (на основе общего решения);

(11) движение с линейной отталкивающей силой (на основе интеграла энергии);

(12) движение с линейной отталкивающей силой и вязким трением;

(13) консервативная система в окрестности регулярной точки потенциальной энергии;

(14) консервативная система в окрестности невырожденного минимума потенциальной энергии;

(15) консервативная система в окрестности невырожденного максимума потенциальной энергии;

(16) консервативная система в окрестности невырожденного перегиба потенциальной энергии;

(17) математический маятник;

(18) точка на вращающейся окружности при небольшой угловой скорости;

(19) точка на вращающейся окружности при большой угловой скорости;

(20) гармонический осциллятор при наличии сухого трения;

(VII) знать качественные свойства гармонического осциллятора на плоскости и сферического маятника;

(VIII) знать три основные модели движения точки по неподвижной плоской кривой: идеальная связь, вязкое трение и сухое трение; знать методику и последовательность решения уравнений движения (с применением репера Френе) во всех вариантах и основные качественные эффекты движения;

(IX) применять теоремы об изменении импульса, кинетического момента и кинетической энергии из предыдущего семестра; знать условия существования интегралов импульса, площадей и энергии;

(X) **владеть основами применения лагранжева формализма, особо ценить знание рабочих формул для ТВЕРДОГО ТЕЛА; о этом подробнее написано ниже.**

Ниже около номеров задач проставлены цифры. Подтекст здесь такой:
(^{2}) – решить и запомнить результат, иначе ... ;
(^{3}) – решать в первую очередь наряду с предыдущим;
(^{4}) – хорошо развивает мозги;
(^{5}) – отложить напоследок, но не игнорировать совсем.
Эти цифры не могут быть основанием для деликатных намеков преподавателю на зачете или экзамене.

Разумеется, следует уметь доводить задачи, не требующие громоздких выкладок, до правильного ответа, а также уметь давать ответу качественную, геометрическую или физическую интерпретацию.

Лагранжев формализм

(1) **Система уравнений Лагранжа**

второго порядка в переменных $q_1, \dots, q_n$ имеет вид

(2) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \ , \qquad i = 1, \dots, n$$

или короче

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathrm{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathrm{q}} = 0 \ , \qquad \mathrm{q} = (q_1, \dots, q_n),$$

где $L(\dot{\mathrm{q}}, \mathrm{q}, t) = L(\dot q_1, \dots, \dot q_n, q_1, \dots, q_n, t)$ - заданная функция, именуемая *лагранжианом* или *функцией Лагранжа*. Запись 2 указывает последовательность операций для выписывания системы.

Вместо того, чтобы после замены переменных преобразовывать сами уравнения, достаточно
(A) преобразовать только характеристическую функцию Лагранжа и
(Б) применить стандартный набор операций в новых переменных: речь идет о группе замен координат, т.е. любых подстановках вида

(3) $$q_i = q_i(\xi_1, \dots, \xi_n, t) \ , \qquad i = 1, \dots, n \ ,$$

при условии, что якобиан не равен нулю. Дифференцируя (3), получаем

(4) $$\dot q_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial q_i}{\partial \xi_j}\dot \xi_j + \frac{\partial q_i}{\partial t} \ ,$$

подставляем (3),(4) в $L(\dot{\mathrm{q}}, \mathrm{q}, t)$ и получаем новый лагранжиан $\tilde L(\dot \xi, \xi, t)$.

В реальных задачах лагранжиан чаще всего имеет вид $L = T - V$, где T – кинетическая энергия, V – потенциальная. Обоснование ниже; пока надо бесхитростно вычислять обе функции, видя, что положение системы определяется одной переменной q.

Простейшие потенциалы V :

для однородной силы тяжести это Mg, умноженное на высоту точки или центра масс тела,

для идеальной пружины (ее длина в нерастянутом состоянии равна нулю) это *коэффициент жесткости* k, умноженный на половину квадрата расстояния между точками прикрепления.

1. Задачи с одной степенью свободы.

1) Рассматривается одномерное уравнение Лагранжа:

(1)[3] выписать подробно (2) при $n = 1$;

(2)[2]) убедиться, что если при $n = 1$ к лагранжиану прибавить $f(q)\dot q$, то уравнение Лагранжа не изменится; более общо: если прибавить $\dfrac{d\varphi(q,t)}{dt}$, то уравнение Лагранжа не изменится (*калибровка*)

2)[2] В основном будут попадаться автономные системы с *натуральным лагранжианом*

(5) $$L = \frac{1}{2}a(q)\dot q^2 - V(q) \ .$$

Доказать, что натуральный лагранжиан порождает уравнение

(6) $$a(q)\ddot q + \frac{1}{2}a'(q)\dot q^2 + V'(q) = 0 \qquad ' \equiv \frac{d}{dq}.$$

с интегралом энергии

(7) $$\mathrm{H} = \frac{1}{2}a(q)\dot q^2 + V(q) = h = \mathrm{const} \ .$$

3) Рассматриваются одномерные автономные уравнения Лагранжа. Для заданного автономного лагранжиана получить общее решение и решение задачи Коши $q(0) = a, \dot{q}(0) = u$.

(1)^2 $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2$ (движение по инерции);

(2)^2 $L = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - q)$ (движение в поле тяжести);

(3)^2 $L = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 - q^2)$ (гармонический осциллятор);

(4)^2 $L = \frac{1}{2}(\dot{q}^2 + q^2)$ (упругое отталкивание).

4)^4 Всегда существует замена переменной $s = s(q)$, после которой автономный натуральный лагранжиан получает вид $L = \frac{1}{2}\dot{s}^2 - W(s)$, и уравнение Лагранжа становится таким: $\ddot{s} = -\dfrac{dW}{ds}$.

5)^4 Предложить лагранжиан, порождающий линейное дифференциальное уравнение (или ему равносильное) $a(t)\ddot{q} + b(t)\dot{q} + c(t)q = 0$
(ответ: например, $L = \dfrac{1}{2}\exp\left(\int \dfrac{b(t)}{a(t)}\right)\left[\dot{q}^2 - \dfrac{c(t)}{a(t)}q^2\right]$).

6)^3 Дано уравнение с лагранжианом $L = L(\dot{q})$. Убедиться, что общее решение для этого уравнения – $q = C_1 t + C_2$.

7) Математический маятник переменной длины. Точка массы m в поле тяжести движется по вертикальной окружности радиуса $l(t)$ – или же подвешена на нити длины $l(t)$, но возможность того, что нить может ослабнуть, не учитывается. Обозначим через θ угол отклонения нити от вертикали, идущей вниз. Показать, что

(1)^3 с точностью до калибровки лагранжиан

$$L = \frac{1}{2}ml^2(t)\dot{\theta}^2 + mgl(t)\cos\theta;$$

(2)^3 уравнение движения имеет вид

$$\ddot{\theta} + \frac{2\dot{l}(t)}{l(t)}\dot{\theta} + \frac{g}{l(t)}\sin\theta = 0\ ;$$

8) Математический маятник с колеблющейся точкой подвеса. Точка массы m в поле тяжести подвешена на нити длины l, точка подвеса колеблется вдоль вертикали по закону $s(t)$. Обозначим через θ угол отклонения нити от вертикали, идущей вниз. Показать, что

(1)^3 с точностью до калибровки лагранжиан

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + m(g + \ddot{s}(t))l\cos\theta\ ;$$

(2)^3 уравнение движения имеет вид

$$\ddot{\theta} + \frac{g + \ddot{s}(t)}{l}\sin\theta = 0\ .$$

9) Две массы m_1 и m_2 висят на нерастяжимой нити, переброшенной через невесомый блок в поле тяжести. Ни одна из частей нити не отклоняется от вертикали:

(1)^3 выписать лагранжиан и найти ускорение нити;

(2)^3 допустим, что m_1 перемещается вдоль нити (наподобие карабкающей обезьяны) по закону $s(t)$; найти формулу, по которой изменяется расстояние z от блока до m_1
(ответ: $\ddot{z} = \frac{m_2\ddot{s}(t) + (m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2}$).

У (6) имеется решение $q(t) \equiv q_*$ тогда и только тогда, когда $V'(q_*) = 0$. Будем считать $q_* = 0$. Линеаризация уравнения (6) дает

$$a(0)\ddot{q} + V''(0)q = 0 \ . \tag{8}$$

Если $V''(0) > 0$ (минимум, устойчивое равновесие), то получаются *малые колебания*

$$q(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t, \ \omega = \sqrt{\frac{V''(0)}{a(0)}} \ . \tag{9}$$

Если $V''(0) < 0$ (максимум, неустойчивое равновесие), то получается *экспоненциальный уход*

$$q(t) = C_1 e^{\chi t} + C_2 e^{-\chi t}, \ \chi = \sqrt{-\frac{V''(0)}{a(0)}} \ . \tag{10}$$

Величины ω, χ называются соответственно *частотой* и *показателем*. В конкретной задаче по физическому смыслу теории величины C_1, C_2 должны быть значительно меньше ($\ll$) величины характерного интервала изменения координаты q, но об этом упоминают редко.

10) Точка массы m движется по оси x, будучи зажата между двумя идеальными пружинами (сила натяжения пружины пропорциональна ее длине с коэффициентом жесткости). Концы пружин зафиксированы в точках с координатами $\pm d$. Написать лагранжиан, уравнение Лагранжа, найти положение равновесия и частоту колебаний, если

(1)[3] коэффициенты жесткости обеих пружин равны $k/2$
($L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2, \ q_* = 0, \ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$);

(2)[3] коэффициенты жесткости пружин равны k_1, k_2
($q_* = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} d, \ \omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$).

11)[3] Точка массы m в равновесии зажата между двумя горизонтальными идеальными пружинами жесткости $k/2$, но потом движется по оси y. Написать лагранжиан, найти частоту колебаний.

12)[4] Конструкция, как в предыдущей задаче, но теперь сила натяжения каждой пружины длины l равна не $\frac{k}{2}l$, а $F + \frac{k}{2}(l - d)$. Показать, что частота малых колебаний $\omega = \sqrt{\frac{F}{dm}}$.

13)[3] Дана кривая $r = r(s)$ в вертикальной плоскости, где s – натуральный параметр (длина дуги). Пусть ρ – радиус кривизны кривой в нижней точке. Показать, что частота малых колебаний $\omega = \sqrt{\frac{g}{\rho}}$.

Если $H(\dot{q}, q) = h$ – интеграл энергии уравнения Лагранжа, то выражаем из этого уравнения скорость: $\dot{q} = v(q, h)$. Получается уравнение первого порядка (с параметром), которое интегрируется разделением переменных. В частности, для натуральной системы

$$\frac{1}{2} a(q) \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 + V(q) = h \iff \pm \frac{dq}{\sqrt{2(h - V(q))/a(q)}} = dt. \tag{11}$$

Часто получается колебание в пределах *области возможности движения* (*ОВД*) $\{V(q) \leqslant h\}$.

14)[3] Получить использованием интеграла энергии общее решение задачи о гармоническом осцилляторе: $2L = \dot{q}^2 - \omega^2 q^2$.

15)[4] Получить общее решение задачи с $2L = \dot{q}^2 - \operatorname{tg}^2 q$.
Ответ: $q = \arcsin(\sqrt{\frac{2h}{1+2h}} \sin(\sqrt{1+2h}\, t + \alpha))$.

16)[5] Дана кривая $r = r(\theta)$ в вертикальной плоскости, причем значению полярного угла $\theta = 0$ отвечает направление вертикально вниз. Известно, что время движения точки по любой дуге из начала координат равно времени движения по соответствующей хорде. Пусть d – расстояние от нижней точки до горизонтали. Используя интеграл энергии, показать, что

(1) кривая есть лемниската $r = \sqrt{\sin 2\theta}$;

(2) частота малых колебаний в нижней точке $\omega = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{d}}$.

17)[3] МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МАЯТНИК. Точка массы m в поле тяжести движется по вертикальной окружности радиуса l – или же подвешена на нити длины l, но возможность того, что нить может ослабнуть, не учитывается. Обозначим через θ угол отклонения нити от вертикали, идущей вниз. Показать, что

(1)[3] уравнение движения имеет вид

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0 \ ,$$

где $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ – частота малых колебаний около $\theta = 0$;

(2)[3] интеграл энергии имеет вид

$$\frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - mgl\cos\theta = h \ ;$$

18) Точка массы m скользит в трубке-окружности радиуса l, вращающейся вокруг своего вертикального диаметра с угловой скоростью Ω (ускорение силы тяжести равно g). Пусть θ – угол отклонения нити от вертикали вниз. Показать, что

(1)[4] при $\Omega^2 < \frac{g}{l}$ положения равновесия и соответствующие ($\rightsquigarrow$) частоты и показатели суть

$$\theta = 0 \rightsquigarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l} + \Omega^2} \text{ и } \theta = \pi \rightsquigarrow \chi = \sqrt{\frac{g}{l} - \Omega^2} \ ; \tag{12}$$

(2)[4] при $\Omega^2 > \frac{g}{l}$ картина более богатая:

$$\begin{aligned} &\theta = 0, \pi \rightsquigarrow \chi = \sqrt{\Omega^2 \mp \frac{g}{l}} \text{ и} \\ &\theta = \pm\arccos\frac{g}{l\Omega^2} \rightsquigarrow \omega = \frac{1}{\Omega}\sqrt{(\Omega^2 - \frac{g}{l})(\Omega^2 + \frac{g}{l})} \ ; \end{aligned}$$

(3)[3] область возможности движения задается неравенством

$$-\cos\theta + \frac{l\Omega^2}{2g}\sin^2\theta \leqslant \frac{h}{mgl} \ .$$

Изобразить графически возможные варианты левой части.

19)[5] Пусть $H(\dot{q}, q)$ – первый интеграл автономного уравнения Лагранжа. Найти лагражиан $L(\dot{q}, q)$, порождающий это уравнение.

[Указание: уравнение $\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = H(\dot{q}, q)$ разделить на $\dot{q}$ и ... .]

20)[5] Однородный обруч радиуса a подвешен ко гладкой стене за нить длиной l. Обозначим α отклонение нити от вертикали, φ – угол поворота обруча. Найти связь между α и φ и показать, что частота малых колебаний около равновесия $\alpha_* = \arcsin\frac{a}{l+a}$ равна

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{l\sin 2\alpha_*}} \ .$$

2. Движение с освобождающейся связью.

Некоторые задачи ставятся так, что область возможности движения (ОВД) с заданной энергией h задается не только энергетическим неравенством $V(q) \leqslant h$, но и условием, что некоторая *сила реакции связи* N неотрицательна (натяжение нити, воздействие опоры) – если это условие нарушено, то происходит *освобождение от связи*.) Как функции состояния, **реакции всегда квадратичны по скоростям,** так что в случае одной степени свободы - линейны по h.

21)[3] СНОВА МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МАЯТНИК Рассмотрим движение точки массы m, подвешенной на нити длины l в вертикальной плоскости (ускорение силы тяжести g). Начальное условие: точка находится в нижнем положении, ее скорость горизонтальна и по модулю равна v_0. Поэтому $h = \frac{1}{2}mv_0^2$. Граница возможности движения определяется следующими условиями:

либо скорость обратится в нуль и точка пойдет назад;

либо ослабнет нить и точка покинет окружность.

Пусть θ – угол отклонения нити от вертикали, идущей вниз. Тогда $T = \frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2$, $V = -mgl\cos\theta$, $N = mg\cos\theta + m\dfrac{l^2\dot\theta^2}{l}$.

ОВД задается неравенствами $-mgl\cos\theta \leqslant h$, $-\frac{3}{2}mg\cos\theta \leqslant h$, так что если $v_0 \leqslant \sqrt{2gl}$, то будут колебания в нижней полуокружности, если $v_0 \in (\sqrt{2gl}, \sqrt{5gl})$, то нить ослабнет в верхней полуокружности, если $v_0 \geqslant 5gl$, то будет движение по окружности в одну сторону.

22) Точка подвешена на нити, как в предыдущей задаче, и еще на нее действует пружина жесткости k, конец которой закреплен в верхней точке окружности. Показать, что

(1)[4] потенциальная энергия $V = -(mg - kl)l\cos\theta$;

(2)[4] ОВД задается неравенствами

$$-\cos\theta \leqslant h_1\ ,\quad -\frac{3}{2}\cos\theta + \frac{kl}{2(mg-kl)} \leqslant h_1\ , \tag{13}$$

где $h_1 = \frac{h}{l(mg-kl)}$ – безразмерная энергия;

(3)[4] положение равновесия $\theta = 0$ устойчиво, если $mg - kl > 0$ и тогда частота малых колебаний $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l} - \dfrac{k}{m}}$.

23) Точка подвешена на нити и пружине, как в предыдущей задаче, но конец пружины закреплен на расстоянии d по горизонтали от центра окружности. Жесткость пружины не задана, зато известно положение равновесия $\theta_* \in (0, \pi/2)$. Показать, что

(1)[4] ОВД симметрична относительно θ_*,

(2)[4] частота малых колебаний у равновесия $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l\cos\theta_*}}$.

24) Точка подвешена на нити, намотанной на вертикальный неподвижный диск радиуса a. Пусть θ – угол отклонения нити от вертикали, идущей вниз, и при $\theta = 0$ длина нити $l = 0$. Показать, что

(1)[4] ОВД задается неравенствами

$$-\theta\cos\theta + \sin\theta \leqslant h_1\ ,\quad -\frac{3}{2}\theta\cos\theta + \sin\theta \leqslant h_1\ , \tag{14}$$

где $h_1 = \frac{h}{mga}$ – безразмерная энергия;

(2)[4] частота малых колебаний у положения равновесия $\theta_* = 2k\pi$, где $k > 0$, равна $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{2k\pi a}}$.

25) Обруч радиуса a катается внутри неподвижной вертикальной окружности радиуса r. Обозначим θ угловое отклонение центра обруча от вертикали вниз. Показать, что

(1)^3 ОВД задается неравенствами $-\cos\theta, -2\cos\theta \leqslant \dfrac{h}{mg(r-a)}$;

(2)^3 частота малых колебаний около $\theta = 0$ равна $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{2(r-a)}}$.

26) Палочка длины $2l$ катается по неподвижной окружности радиуса r, причем φ – угол отклонения ее от горизонтального положения, в котором в точке касания с окружностью находится середина палочки. Показать:

(1)^3 частота малых колебаний около равновесия $\omega = \sqrt{\dfrac{3gr}{l^2}}$;

(2)^4 пока $\varphi \leqslant \frac{l}{r}, \frac{\pi}{2}$, границы возможности движения определяются только энергетическим неравенством.

27)^3 Невесомый обруч радиуса a с прикрепленой к нему точечной массой m катится по горизонтальной прямой; пусть φ – угол поворота радиуса обруча, проведенного к m, причем при $\varphi = 0$ он горизонтален. Доказать, что

(1)^3 лагранжиан $L = m(1+\sin\varphi)a^2\dot\varphi^2 - mga\sin\varphi$;

(2)^3 уравнение движения $\ddot\varphi + \frac{1}{2}\frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi}\left(\frac{g}{a} + \dot\varphi^2\right) = 0$;

(3)^3 реакция опоры $N = m\frac{1+\sin\varphi}{2}(g - a\dot\varphi^2)$;

(4)^3 при движении "из"верхнего положения равновесия обруч подскочит, когда φ обратиться в нуль.

28)^3 Однородная палочка скользит концами по вертикальной и горизонтальной прямым; угол φ – отклонение ее от вертикали. Показать, что в движении из начального состояния покоя φ_0 она отойдет от вертикальной прямой после того, как окажется $\cos\varphi = \frac{2}{3}\cos\varphi_0$.

3. Обобщенные силы

Пусть в пространстве движутся точки $m_\nu, \nu = 1, \ldots, N$ с радиусами-векторами $\boldsymbol{r}_\nu$. Предположим, что эти точки находятся под действием

во-первых, *заданных силы* $\boldsymbol{F}_\nu$, которые, вообще говоря, зависят от состояние всей системы точек, то есть от $t, \boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N, \dot{\boldsymbol{r}}_1, \ldots, \dot{\boldsymbol{r}}_N$;

во-вторых, *голономных связей*. Последнее означает, что расположение системы точек в пространстве не может быть произвольным, но зато может быть корректно выражено через некоторые *лагранжевы координаты* (или *обобщенные координаты*) $q_1, \ldots, q_n$ и время:

(15) $$\boldsymbol{r}_\nu = \boldsymbol{r}_\nu(q_1, \ldots, q_n, t)\ .$$

Тогда

(16) $$\dot{\boldsymbol{r}}_\nu = \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{r}_\nu}{\partial q_i}\dot q_i.$$

Пусть есть функция $f(q,t)$. Ее *изохронным дифференциалом* или *вариацией* называется выражение (дифференциальная форма) вида

(17) $$\delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i}\delta q_i\ ,$$

где специально написано δq_i, а не dq_i – чтобы подчернуть отличие от обычного полного дифференциала.

Элементарной работой данной механической системы называется дифференциальная форма

(18) $$\delta A = \sum_{\nu=1}^{N} (\boldsymbol{F}_\nu, \delta\boldsymbol{r}_\nu) = \sum_{i=1}^{n} Q_i(\dot{\mathrm{q}}, \mathrm{q}, t)\delta q_i\ ,$$

где подразумевается, что в выражения сил подставлены зависимости (16), (15), вычислены изохронные дифференциалы и приведены подобные члены. Коэффициенты Q_i называются *обобщенными силами*. В выражение кинетической энергии $T = \frac{1}{2}\sum \dot{\boldsymbol{r}}_\nu^2$ тоже подставим зависимости (15) и получим $T = T(\dot{\mathrm{q}}, \mathrm{q}, t)$. Тогда система уравнений движения системы точек с голономными связями может быть представлена в *универсальной лагранжевойформе*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i\ , \qquad i = 1, \ldots, n\ . \tag{19}$$

Последнее утверждение можно рассматривать как *определение СИСТЕМЫ С ИДЕАЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ* (корректность которого - что описание движения не зависит от выбора координат - надо доказывать) либо выводить его из стандартного определения такой системы: это ПРИНЦИП Д'АЛАМБЕРА-ЛАГРАНЖА).

Силы Q_i называются *потенциальными*, если

$$Q_i \equiv \frac{\partial V}{\partial q_i}\ , \qquad i = 1, \ldots, n \tag{20}$$

(тут $V(\mathrm{q}, t)$ – *потенциал* или *потенциальная энергия*). Тогда

$$\delta A = \delta V(\mathrm{q}, t)\ . \tag{21}$$

Более общо, силы Q_i называются *обобщенно-потенциальными*, если существует функция $W = V(\mathrm{q}, t) + \sum W_i(\mathrm{q}, t)\dot{q}_i$ такая, что

$$Q_i \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial W}{\partial q_i}\ , \qquad i = 1, \ldots, n \tag{22}$$

(тут W – *обобщенный потенциал*). Тогда система уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathrm{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathrm{q}} = 0\ , \quad L = T - W\ . \tag{23}$$

Электромагнитная сила (сила Лоренца), действующая в вакууме на заряд q,

$$\mathbf{F}(\dot{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{r}, \mathbf{t}) = q \quad \mathbf{E}(\boldsymbol{r}, \mathbf{t}) + \frac{1}{c}\left[\dot{\boldsymbol{r}} \times \mathbf{B}(\boldsymbol{r}, \mathbf{t})\right] \quad ;$$

обобщенно-потенциальна в силу того, напряженность электрического поля **E** *и индукция магнитного поля* **B** *удовлетворяют уравнениям Максвелла.*

В случае ПОСТОЯННЫХ **E** *и* **B** *обобщенный потенциал силы Лоренца равен*

$$W(\dot{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{r}) = q(\mathbf{E}, \boldsymbol{r}) + \frac{q}{2c}(\mathbf{B}, [\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}])\ .$$

Среди действующих сил могут быть не только (обобщенно) потенциальные и учтенные в лагранжиане, но и иные – обозначим их $Q'_i(\dot{\mathrm{q}}, \mathrm{q}, t)$. Тогда уравнения движения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q'_i\ . \tag{24}$$

Силы, зависящие от скорости, называются *диссипативными* (*рэлеевыми*), если есть *диссипативная функция* (*функция Рэлея*) $\Phi(\dot{\mathrm{q}}, \mathrm{q}, t)$ такая, что

$$Q'_i \equiv -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i}\ . \tag{25}$$

Обычно Φ является положительно определенной квадратичной формой скоростей. Тогда если $\frac{\partial L}{\partial t} \equiv 0$, то вдоль движений полная энергия H убывает (что и называется *диссипацией*), поскольку

$$\frac{dH}{dt} = -2\Phi < 0\ . \tag{26}$$

Для силы вязкого трения $\boldsymbol{F} = -c\boldsymbol{v}$ диссипативная функция $\Phi = \frac{c}{2}\boldsymbol{v}^2$.

4. Наложение голономной связи

по существу сводится к фиксации лагранжевой координаты, например, $q_n = 0$. Если дана функция состояния $\Phi(\dot q_1, \ldots, \dot q_n, q_1, \ldots, q_n, t)$, то пусть $\widehat{\Phi} \equiv \Phi(\dot q_1, \ldots, \dot q_{n-1}, 0, q_1, \ldots, q_{n-1}, 0, t)$. Аналогично для функций, зависящих еще и от ускорений. Из способа получить (19) следует, что $n-1$ уравнение движения новой голономной системы суть

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \widehat{T}}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial \widehat{T}}{\partial q_i} = \widehat{Q_i}\ , \qquad i = 1, \ldots, n-1\ . \tag{27}$$

Последнее из уравнений системы (19) послужит для вычисления дополнительной обобщенной *силы реакции связи* N которая удерживает систему на требовании $q_n = 0$:

$$\frac{d}{dt}\widehat{\frac{\partial T}{\partial \dot q_n} - \frac{\partial T}{\partial q_n}} = \widehat{Q_n} + N\ . \tag{28}$$

Реально у N всегда есть физический "прообраз".

5. ТВЕРДОЕ ТЕЛО.

Расположение такой системы (подсистемы) точек определяется радиусом-вектором $\boldsymbol{s}(x, y, z)$ некоторой отмеченной точки S и матрицей поворота $\Theta(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ некоторого репера $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$, жестко связанного с телом. Здесь φ_i, — углы, задающие ориентацию тела, например, углы Эйлера или Крылова. Пусть $\boldsymbol{F}$ – сумма всех внешних сил, действующих на тело, $\boldsymbol{M}_S$ – суммарный момент внешних сил относительно точки S. Тогда элементарная работа (или ее часть для тела-подсистемы) имеет вид

$$\delta A = (\boldsymbol{F}, \delta \boldsymbol{s}) + \sum (\boldsymbol{M}_S, \boldsymbol{e}_{\varphi_i})\delta\varphi_i\ , \tag{29}$$

где $\boldsymbol{e}_{\varphi_i}$ — направление оси вращения тела, когда изменяется один только угол φ_i, а остальные неизменны. Таким образом, угловая скорость твердого тела имеет вид

$$\boldsymbol{\omega} = \sum \dot\varphi_i \boldsymbol{e}_{\varphi_i}.$$

Переменные x, y, z могут быть выражены через одну-три лагранжевы координаты, углов φ_i может быть и меньше.

Момент сил *вязкого трения* обычно записывается в виде $\boldsymbol{M} = -C\boldsymbol{\omega}$; диссипативная функция для него

$$\Phi = -\frac{\mathrm{C}}{2}\boldsymbol{\omega}^2. \tag{30}$$

При вычислении лагранжиана подстановку обобщенных координат и скоростей надо делать не только в кинетическую энергию, но и сразу в исходный (записанный в декартовых координатах) потенциал, обобщенный потенциал. В диссипативную функцию тоже.

29) Отрезок длиной l скользит концом A по оси x и здесь действует сила вязкого трения $-c\boldsymbol{v}_A$, а концом B по оси y и здесь действует постоянная сила $F\boldsymbol{e}_y$. Пусть φ – угол между отрезком и осью y.

(1)[3] Найти выражение для обобщенной силы.
Ответ: $Q_\varphi = -Fl\cos\varphi - \mathrm{c}l^2\sin^2\varphi\dot\varphi$.
Каковы здесь потенциал и диссипативная функция?

(2)[3] Пусть m – масса отрезка. Написать его кинетическую энергию.
Ответ: $T = \frac{2ml^2}{3}\dot\varphi^2$.

30) Однородный диск радиуса a катится по горизонтальной оси x, и на него намотана нерастяжимая нить. Диск тянут за нить с силой F вправо под углом α к оси x. Кроме того, в точке касания имеется вязкое трение качения с коэффициентом C.

(1)[3] Найти выражение для обобщенной силы.
Ответ: $Q_x = F\cos\alpha - \mathrm{C}\dot{x}/a$.
Каковы здесь потенциал и диссипативная функция?

(2)[2] Пусть m – масса диска. Написать его кинетическую энергию.
Ответ: $T = \frac{3m}{4}\dot{x}^2$.

(3)[3] Написать уравнение Лагранжа.

31) Точка движется по сфере радиуса r. На нее действует только сила вязкого трения $-c\boldsymbol{v}$. Берем сферические координаты $\theta \in (0,\pi), \psi$.

(1)[2] Написать выражение для скорости.
Ответ: $\boldsymbol{v} = r\dot{\theta}\boldsymbol{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\psi}\boldsymbol{e}_\psi$.

(2)[3] Найти выражение для обобщенных сил.
Ответ: $Q_\theta = -\mathrm{c}r^2\dot{\theta}\; Q_\psi = -cr^2\sin^2\theta\dot{\psi}$.

(3)[4] Можете ли описать движение точки "на пальцах"?

32) Твердое тело с неподвижной точкой движется под действием вращающего момента $\boldsymbol{M}$. Используются углы Эйлера $\theta \in (0,\pi), \psi, \varphi$, задающие ориентацию подвижного репера $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ относительно неподвижного $\boldsymbol{e}_x\boldsymbol{e}_y\boldsymbol{e}_z$. Выписать обобщенные силы, если

(1)[4] $\boldsymbol{M} = M\boldsymbol{e}_z$ (ответ: $Q_\theta = 0\; Q_\psi = M\; Q_\varphi = M\cos\theta$);

(2)[4] $\boldsymbol{M} = M\boldsymbol{e}_3$ (ответ: $Q_\theta = 0\; Q_\psi = M\cos\theta\; Q_\varphi = M$);

(3)[4] $\boldsymbol{M} = -C\boldsymbol{\omega}$ (совет: докажите (30) и выпишите Φ).

33) Твердое тело состоит из однородного диска радиуса r и невесомой штанги длины l, перпендикулярной плоскости диска в его центре. Тело катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости так, что конец штанги остается неподвижным на высоте $h = r = l\operatorname{tg}\alpha$ от плоскости (в сферическом шарнире). Трение отсутствует, а реакция опоры лежит в плоскости диска. Показать, что

(1)[3] при движении угол поворота штанги ψ меняется равномерно;

(2)[4] реакция плоскости перпендикулярна ей: $R = m(g + \frac{r}{2}\dot{\psi}^2)$.
Реально, конечно, всегда $|\dot{\psi}|$ убывает –

(3)[3] какова может быть природа обобщенной силы, которую надо дописать в уравнение Лагранжа, чтобы объяснить это явление?

(4)[3] Предположим, что в шарнире действуют силы вязкого трения с моментом $\boldsymbol{M} = -\mathrm{C}\boldsymbol{\omega}$; чему равна обобщенная сила Q_ψ?

(5)[3] Предположим, что в точке контакта с плоскостью возникает *вязкое трение качения* с моментом $\boldsymbol{M}_\parallel = -\mathrm{C}_k\boldsymbol{\omega}_\parallel$ (подразумеваются векторы, параллельные плоскости); чему равна Q_ψ?

(6)[3] Предположим, что в точке контакта с плоскостью возникает *вязкое трение верчения* с моментом $\boldsymbol{M}_\perp = -\mathrm{C}_b\boldsymbol{\omega}_\perp$ (подразумеваются векторы, перпендикулярные плоскости); чему равна обобщенная сила?
(Ответ: $Q_\psi = -C_b\dot{\psi}/\sin^2\alpha$)

34) Твердое тело состоит из однородного шара радиуса r и невесомой штанги длины $l - r$, перпендикулярной поверхности шара. Тело катится без проскальзывания по наклонной по углом β плоскости так, что конец штанги остается неподвижным на ней (в сферическом шарнире). Пусть ψ – угол поворота проекции штанги на плоскость от направления наибыстрейшего спуска.

(1)[4] Трение отсутствует. Показать, что частота малых колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{5}{7}\frac{g}{l}\sin\beta}\;;$$

(2)^3 Предположим, что вдоль штанги действует постоянный вращающий момент M; чему равна обобщенная сила Q_ψ?

(3)^3 найти положения равновесия в этих предположениях;

(4)^3 Предположим, что в шарнире действуют силы вязкого трения с моментом $\boldsymbol{M} = -\mathrm{C}\boldsymbol{\omega}$; чему равна обобщенная сила Q_ψ?

(5)^3 Предположим, что в точке контакта с плоскостью возникает вязкое трение качения; чему равна Q_ψ?

(6)^4 Как здесь насчет трения верчения?

35) Однородная прямоугольная пластинка массой m, длиной $2b$ и шириной $2a$ поворачивается вокруг горизонтальной продольной оси симметрии на угол θ относительно плоской невесомой рамки, а эта ось в свою очередь поворачивается (вместе с рамкой) вокруг вертикали на угол ψ :

(1)^3 вычислить кинетическую энергию пластинки;

(2)^3 предположим, что рамка равномерно вращается с угловой скоростью $\dot\psi = \Omega$; доказать, что частота малых колебаний пластинки равна как раз Ω;

(3)^4 предположим, что вращению вокруг горизонтали препятствует момент сил вязкого трения $-C\dot\theta$: написать уравнение Лагранжа и найти равновесия (ответ: $\frac{ma^2}{3}(\ddot\theta - \Omega^2\sin\theta\cos\theta) = -C\dot\theta$; $\theta_* = n\pi/2$);

(4)^4 вычислить вертикальный вращающий момент M_ψ, который надо прикладывать к оси рамки, чтобы поддерживать ее равномерное вращение (ответ: $M_\psi = \frac{2ma^2}{3}\Omega\dot\theta\sin\theta\cos\theta$);

(5)^4 предположим, что угол θ равномерно меняется ($\theta = \nu t$), а вертикальная ось рамки проворачивается свободно; написать формулу изменения угла ψ (ответ: $\psi = C\int(a^2 + b^2\sin^2\nu t)^{-1}dt$);

(6)^4 вычислить горизонтальный вращающий момент M_θ, который надо прикладывать к оси пластинки, чтобы поддерживать ее равномерное вращение.

Две и более степеней свободы.

6. Интегралы уравнений движения

Первым интегралом системы уравнений движения $\left[\begin{array}{l} F(\dot{\mathrm{q}}, \mathrm{q}, t) \\ F(\mathrm{p}, \mathrm{q}, t) \end{array}\right.$, постоянная вдоль любого решения этой системы. Вот простейшие интегралы уравнений Лагранжа (без обобщенных сил).

1. Если $\dfrac{\partial L}{\partial t} \equiv 0$ то имеется *интеграл энергии*

$$H(\dot{\mathrm{q}}, \mathrm{q}) = \sum_{i=1}^{n} \dot q_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - L = h = \mathrm{const}$$

2. Если (очень похоже) $\dfrac{\partial L}{\partial q_k} \equiv 0$, (тогда координата q_k называется *циклической* в используемой системе переменных), то имеется

$$J = \frac{\partial L}{\partial \dot q_k} = c = \mathrm{const}. \tag{31}$$

7. Автономные голономные системы

– те, у которых выражения сил $\boldsymbol{F}_\nu$. и радиусов векторов $\boldsymbol{r}_\nu$ не содержат времени явно – встречаются чаще всего. Такая система с потенциальными силами имеет *натуральный лагранжиан*: $L = T - V$, где

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathrm{q})\dot q_i \dot q_j \tag{32}$$

– кинетическая энергия, а $V(\mathrm{q})$ – потенциальная энергия.
Интеграл энергии $H = T + V = h$ (сумма кинетической и потенциальной энергии сохраняется; ЛАГРАНЖИАН - РАЗНОСТЬ ЭНЕРГИЙ). При фиксированном h решение $\mathrm{q}(t)$ обязательно находится в *области возможности движения* (*ОВД*) $\{V(\mathrm{q}) \leqslant h\}$.

Матрица $A = \|a_{ij}\|$ всегда симметрическая и положительно определенная. Система уравнений Лагранжа

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ik}(\mathrm{q})\ddot q_k + \sum_{k,l=1}^{n} \Gamma_{i,kl}(\mathrm{q})\dot q_k \dot q_l + \frac{\partial V}{\partial q_i} = 0\ . \tag{33}$$

У натуральных систем циклический интеграл линеен по скоростям:

$$\sum a_{kj}(\mathrm{q})\dot q_j = c\ . \tag{34}$$

В матричной записи натуральный лагранжиан

$$L = \frac{1}{2}\langle A(\mathrm{q})\dot{\mathrm{q}}, \dot{\mathrm{q}}\rangle - V(\mathrm{q}) \tag{35}$$

У системы (33) имеется решение $\mathrm{q}(t) \equiv \mathrm{q}_*$ тогда и только тогда, когда $\dfrac{\partial V}{\partial \mathrm{q}}(\mathrm{q}_*) = 0$, то есть q_* – критическая точка потенциала. Будем считать $\mathrm{q}_* = 0$. Линеаризация (33) дает

$$A(0)\ddot{\mathrm{q}} + B(0)\mathrm{q} = 0\ , \quad B = \ \frac{d^2V}{d{q_i}^2}q_j \quad . \tag{36}$$

Эти уравнения порождены *лагранжианом первого приближения* (берутся члены второго порядка при разложения L в ряд Тейлора)

$$L_* = \frac{1}{2}\langle A(0)\dot{\mathrm{q}}, \dot{\mathrm{q}}\rangle - \frac{1}{2}\langle B(0)\mathrm{q}, \mathrm{q}\rangle\ . \tag{37}$$

Существует такая невырожденная линейная замена переменных $\mathrm{q} = \mathrm{C}\xi$, после которой L_* приобретает *нормальную форму*

$$L_* = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\dot\xi_k^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\Lambda_k\xi_k^2\ , \tag{38}$$

а в уравнениях движения переменные разделяются:

$$\ddot\xi_k + \Lambda_k\xi_k = 0\ , \qquad k = 1, \ldots, n\ . \tag{39}$$

Величины Λ_k являются корнями *характеристического уравнения*

$$\det(B - \Lambda A) = 0\ , \tag{40}$$

а направляющие векторы f_k осей координат ξ в переменных q ищутся из

$$(B - \Lambda_k A)\mathrm{f}_k = 0\ . \tag{41}$$

Матрица C перехода к нормальным координатам состоит из этих векторов как столбцов. Точнее говоря, им следует придать единичную длину в евклидовой метрике с матрицей A, но если это не соблюсти, то нормальные координаты просто умножатся на некоторые числа, и уравнения (39) сохранят силу (но кинетическая энергия в (38) не станет суммой квадратов).

Если какое-либо $\Lambda_l > 0$, то $\xi_l(t) = a_l\cos(\omega_l t + \alpha_l)$, $\omega_l = \sqrt{\Lambda_l}$. Если все $\Lambda_k > 0$, то имеем *минимум* V, *устойчивое равновесие; при* $n = 2$ *траектории малых колебаний – фигуры Лиссажу в прямоугольнике* $|\xi_k| \leqslant a_k$.

Они замкнуты тогда и только тогда, когда отношение частот ω_1/ω_2 есть число рациональное, в противном случае всюду плотны в прямоугольнике.

Если $\Lambda_l < 0$, то по ξ_l имеет место экспоненциальный уход. Если если часть $\Lambda_k < 0$, то имеем седло, если все $\Lambda_k < 0$ – имеем максимум.

На будущее: для уравнений первого приближения достаточно знать коэффициенты кинетической энергии только в положении равновесия. Это особенно важно в задачах со сложной кинематикой, когда в общем положении вычисление кинетической энергии громоздко.

36) Убедиться, что

(1)[4] если к лагранжиану L прибавить линейную форму скоростей $f_0(\mathrm{q},t)+\sum f_i(\mathrm{q},t)\dot{q}_i$, то к левым частям уравнений Лагранжа прибавятся кососиметричные выражения

$$\sum_k \left(\frac{\partial f_i}{\partial q_k} - \frac{\partial f_k}{\partial q_j}\right)\dot{q}_k + \frac{\partial f_i}{\partial t} - \frac{\partial f_0}{\partial q_i}\ ; \tag{42}$$

(2)[3] если к лагранжиану прибавить полную производную $\frac{d}{dt}\varphi(\mathrm{q},t)$ (*калибровка*), то уравнения Лагранжа не изменятся;

(3)[3] если к автономному лагранжиану L прибавить $\sum f_i(\mathrm{q})\dot{q}_i$, то интеграл типа энергии не изменится;

8. Частные движения

37) Однородный диск массы M и радиуса a вращается вокруг своего центра в вертикальной плоскости (угол поворота – φ). С него сматывается невесомая и нерастяжимая нить, и на ней подвешена точечная масса m (α – угол отклонения нити от вертикали, идущей вниз). При $\varphi - \alpha = 0$ длина нити $l = 0$. Показать, что

(1)[4] уравнения Лагранжа допускают частное решение

$$\alpha(t) \equiv 0\ ,\quad \varphi(t) = -\frac{m}{M+2m}\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2\ ; \tag{43}$$

(2)[4] натяжение нити как функция состояния есть

$$N = \frac{Mm}{M+2m}(g + a(\alpha-\varphi)\dot{\alpha}^2)\ . \tag{44}$$

38) Однородный диск массы M и радиуса a подвешен ("к потолку") в вертикальной плоскости на намотанную на него невесомую и нерастяжимую нить. Обозначим α угол отклонения нити от вертикали вниз, s длину смотавшейся нити. Показать, что

(1)[4] уравнения движения допускают частные решения с $\alpha(t) \equiv 0$, и выписать эти решения явно;

(2)[4] натяжение нити как функция состояния есть

$$N = \frac{M}{3}(g\cos\alpha + s\dot{\alpha}^2)\ . \tag{45}$$

9. Малые колебания

39) В плоскости движется точка единичной массы под действием силы с потенциалом $V = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2 + 2cxy)$. Показать, что

(1)^3 оси нормальных координат повернуты на угол $\operatorname{arcctg} \frac{b-a}{2c}$;

(2)^3 частоты $\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2}(a + b \mp \sqrt{(b-a)^2 + 4c^2})}$.

40) Двойной маятник. К математическому маятнику длины l и массы M подвешен маятник такой же длины и массы m, углы отклонения от вертикали вниз обозначим φ_1 и φ_2. Свести задачу о малых колебаниях к предыдущей. При $M = m$ получить

(1)^3 частоты малых колебаний $\omega_{1,2} = \sqrt{2 \mp \sqrt{2}}\sqrt{\frac{g}{l}}$;

(2)^4 векторы осей нормальных координат $\mathrm{f}_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

41) Пусть двойной маятник состоит из двух одинаковых стержней массы m и длины l. Получить

(1)^3 частоты малых колебаний $\omega_{1,2} = \sqrt{3 \mp 6/\sqrt{7}}\sqrt{\frac{g}{l}}$;

(2)^4 векторы осей нормальных координат $\mathrm{f}_{1,2} = \begin{pmatrix} 4 \mp \sqrt{7} \\ 3\sqrt{7} \pm 6 \end{pmatrix}$.

42) Массы m_1 и m_2 движутся по горизонтальной оси, зажатые между тремя одинаковыми пружинами с жесткостью k. Концы внешних пружин закреплены. Доказать, что отношение меньшей собственной частоты к большей удовлетворяет неравенству $0 < \omega_1/\omega_2 \leqslant 1/\sqrt{3}$.

43) В неподвижной вертикальной окружности радиуса $\rho + a$ катается обруч массы M и радиуса a, по которому, в свою очередь, катается палочка длины $2l$. Положение равновесия – когда обруч находится внизу, а палочка лежит на нем горизонтально. Показать, что

(1)^5 это равновесие устойчиво при условии $(\mathrm{M} + m)a > m\rho$;

(2)^5 в случае $M = m$ и $\rho = a = l$ частоты малых колебаний суть

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{3a}}\ ,\ \omega_2 = \sqrt{\frac{3g}{a}} \tag{46}$$

44) Обосновать, что

(1)^4 лагранжиан вида

$$L = \frac{1}{2}\langle A\dot{\mathrm{q}}, \dot{\mathrm{q}}\rangle + \langle \Phi\mathrm{q}, \dot{\mathrm{q}}\rangle - \frac{1}{2}\langle B\mathrm{q}, \mathrm{q}\rangle \tag{47}$$

(с участием постоянных матриц, причем A, B – симметрические) порождает автономную систему линейных уравнений

$$A\ddot{\mathrm{q}} + (\Phi - \Phi^*)\dot{\mathrm{q}} + B\mathrm{q} = 0\ ; \tag{48}$$

(2)^3 не уменьшая общности, можно считать матрицу Φ кососимметрической;

(3)^4 лагранжиан вида (47) является лагранжианом первого приближения для любого $L = L(\dot{\mathrm{q}}, \mathrm{q})$, если при $\mathrm{q} = 0$ имеется положение равновесия:

а именно, разложим L в ряд Тейлора в окрестности точки $q = 0, \dot{q} = 0$ и оставим сумму членов второго порядка; если линеаризовать дифференциальные уравнения Лагранжа, то линейное приближение будет порождаться именно этой суммой как лагранжианом.

10. Циклические координаты

45)[4] ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА. Пусть есть $n-m$ циклических интегралов

$$J_s = \frac{\partial L}{\partial \dot q_{m+s}} = c_s \ , \quad s = 1, \ldots, n-m \ . \tag{49}$$

Пусть наборы $q_1(t), \ldots, q_m(t), q_{m+1}(t), \ldots, q_n(t)$ суть решения системы уравнений Лагранжа (2), на которых циклические интегралы принимают заданные значения $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_{n-m})$. Тогда усеченные наборы $q_1(t), \ldots, q_m(t)$ удовлетворяют уравнениям лагранжевого вида

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R_c}{\partial \dot q_\alpha} - \frac{\partial R_c}{\partial q_\alpha} = 0 \qquad \alpha = 1, \ldots, n \ , \tag{50}$$

в которых так называемая функция Рауса

$$R_c = L - \sum_{s=1}^{n-m} c_s \dot q_{m+s} \Bigg|_{\dot q_{m+s} = \dot q_{m+s}(\boldsymbol{c}, \ldots)} ; \tag{51}$$

здесь скорости $\dot q_{m+1}, \ldots, \dot q_n$ выражены через $c_1, \ldots, c_{n-m}$ (а заодно и через $\dot q_1, \ldots, \dot q_m, q_1, \ldots, q_m, t$) именно из системы (49). В итоге этим выражениям может быть придан вид

$$\dot q_{m+s} = -\frac{\partial R_c}{\partial c_s}. \tag{52}$$

Уравнения (50) составляют *приведенную систему* (по Раусу).

46) Пусть дана автономная натуральная система с двумя степенями свободы; лагранжевы координаты обозначим $q_1 = r, q_2 = \varphi$, причем последнюю будем считать циклической координатой:

$$L = \frac{1}{2}(\alpha(r)\dot r^2 + 2\gamma(r)\dot r\dot\varphi + \beta(r)\dot\varphi^2) - V(r) \ . \tag{53}$$

Убедиться в следующем:

(1)[3] циклический интеграл равен

$$J = \beta(r)\dot\varphi + \gamma(r)\dot r = c \tag{54}$$

(2)[3] из интегралов $J = c, T + V = h$ следует

$$\begin{gathered} \tfrac{1}{2}\frac{\alpha(r)\beta(r) - \gamma^2(r)}{\beta(r)}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{c^2}{2\beta(r)} + V(r)\right) = h \ , \\ \frac{d\varphi}{dt} = \frac{c - \gamma(r)\dot r}{\beta(r)} \ , \end{gathered} \tag{55}$$

где в скобках стоит т.н. *приведенный потенциал* V_c; так что области возможности движения с заданными c и h задаются неравенством $V_c(r) \leqslant h$.

(3)[4] Пусть по r имеем колебание (из первого). Видя (из второго), что $\varphi(t)$ может быть монотонна, а может и не быть, получаем волнообразное, либо спиралевидное, либо даже более сложное движение в кольце на плоскости r, φ (полярные координаты).

(4)[3] Написать функцию Рауса (с учетом задачи 12).

(5)[5] Пусть $r_*(c)$ - равновесие в приведенной системе; тогда в исходной системе есть решение (*относительное равновесие*) вида

$$r(t) \equiv r_*(c), \varphi(t) = \varphi_0 + \Omega_c(t - t_0) \ ,$$

где $\Omega = \dfrac{c}{\beta(r_*(c))}$;

(6)[5] пусть $\gamma(r) \equiv 0$ и $r_*(c) + a\cos\omega_c(t - t_0)$ – малые колебания по r вблизи относительного равновесия; тогда $\omega_c = \dfrac{V_c''(r_*(c))}{\beta(r_*(c))}$, и вторая координата изменяется по формуле

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \Omega_c t - K_c a \sin\omega_c(t - t_0)\ , \quad K_c = c\frac{\beta'(r_*(c))}{\beta^2(r_*(c))}\ , \quad a \ll r_*$$

47) В поле силы тяжести точка массой m движется по верхней половине конуса $z^2 = x^2 + y^2$. Применяя цилиндрическую систему координат r, α, z, перейти к приведенной системе (по Раусу) и показать, что

(1)[3] ОВД задается неравенством $\dfrac{c^2}{2mr^2} + mgr \leqslant h$;

(2)[3] частота малых колебаний $\omega = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt[3]{\frac{g^2}{mc}}$;

(3)[4] пусть при $t = 0$ имеем $r = r_0$ и начальная скорость величины v_0 перпендикулярна радиусу-вектору; положим $\rho_0 = v_0^2/(\sqrt{2}g)$; тогда в приведенной системе $r(t)$ изменяется между $r_1 \leqslant r_2$, где одна из этих величин равна r_0, а другая есть $\frac{1}{2}(\rho_0 + \sqrt{\rho_0^2 + 4\rho_0 r_0})$.

48) В поле силы тяжести однородный обруч радиуса R и массой M поворачивается вокруг своего центра на угол ψ, а внутри него катается другой обруч – радиуса r и массой m, причем угол отклонения линии центров от вертикали обозначен θ. Требуется

(1)[3] получить циклический интеграл

$$(M + m)R\dot\psi - m(R - r)\dot\theta = c; \tag{56}$$

(2)[3] показать, что частота малых колебаний около $\theta = 0$ есть

$$\omega = \sqrt{\frac{M + m}{2M + m}\frac{g}{R - r}}\ ; \tag{57}$$

(3)[3] объяснить, почему эта частота не зависит от постоянной циклического интеграла;

(4)[4] показать, что ОВД задается неравенствами

$$-\cos\theta\ ,\ -\frac{4M + 3m}{2(M + m)}\cos\theta \ \leqslant\ \frac{1}{mg(R - r)}(h - \frac{c^2}{2(M + m)r^2})\ . \tag{58}$$

49) Эллиптический маятник. Математический маятник массы m и длины l подвешен к точечной массе M, скользящей по горизонтальной оси x. Выписать интегралы движения. Доказать, что при движении из состояния покоя масса m описывает дугу эллипса.

11. Классические задачи

50)[3] ГИРОСКОП С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ. Рамка в форме окружности может поворачиваться на угол ψ вокруг своего диаметра, расположенного вертикально (для определенности). В рамке вокруг другого диаметра вращается однородный диск (угол поворота φ), причем диск перпендикулярен оси вращения, а центр диска находится в центре окружности. Считаем, что $\dot\psi, \dot\varphi$ поначалу положительны, а направления вращения составляют (постоянный) угол $\alpha \in (0, \pi/2)$. Вдоль второй оси вращения со стороны рамки на диск действует момент сил вязкого трения $M_\theta = -\mathrm{C}\dot\varphi$. Разумеется, действуют также и реакции в в концах оси. Помня про третий закон Ньютона, следует выписать

обобщенные силы для рассматриваемой системы, состоящей - ВНИМАНИЕ! их двух твердых тел. Выписать уравнения Лагранжа и доказать, что со временем $\dot\varphi$ убывает (что неудивительно), а $\dot\psi$, наоборот, возрастает (что кажется странным – рамка раскручивается под влиянием сил трения).

Те же результаты можно получить и с помощью общих теорем динамики.

51) ЗАДАЧА О ПЛОСКОМ ДВИЖЕНИИ ТОЧКИ В ЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ СИЛ. Убедиться, что

(1)^2 она подпадает под теорию **46**, причем $\gamma(r) \equiv 0$;

(2)^4 для потенциала $V = -\frac{m\lambda}{r^p}$, $0 < p < 2$ движения, близкие к относительному равновесию r_* имеют вид

$$r_* + a\cos\omega(t - t_0) \ , \ \varphi(t) = \varphi_0 + \Omega t - Ka\sin\omega(t - t_0) \ ,$$

где $\Omega = \sqrt{p\lambda} r_*^{-1-p/2}$, $\omega = \Omega\sqrt{p-2}$, $K = 2/(r_*\sqrt{p-2})$.

52) СФЕРИЧЕСКИЙ МАЯТНИК. Масса m на нити длиной l в поле силы тяжести; движение исследуется в сферических координатах θ, ψ (ось z – вертикаль вверх, долгота $\theta \in (0, \pi)$). Показать, что

(1)^3 лагранжиан

$$L = \frac{ml^2}{2}(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\dot\psi^2) - mgl\cos\theta \quad ; \tag{59}$$

(2)^3 циклический интеграл

$$ml^2\sin^2\theta\dot\psi = c \tag{60}$$

по смыслу есть z -компонента кинетического момента точки;

(3)^3 функция Рауса $R_c = \frac{ml^2}{2}\dot\theta^2 - V_c(\theta)$, где

$$V_c(\theta) = \frac{c^2}{2ml^2\sin^2\theta} + Mgl\cos q; \tag{61}$$

(4)^3 ОВД в приведенной системе задается неравенством $V_c(\theta) \leqslant h$, так что, вообще говоря, угол $\theta(t)$ колеблется в некоторых пределах $[\theta_1(c,h), \theta_2(c,h)]$;

(5)^4 пусть при $t = 0$ имеем $\theta = \theta_0$ и начальная скорость величиной v_0 перпендикулярна радиусу-вектору; положим $\lambda_0 = v_0^2/(\sqrt{2}g)$; тогда угол $\theta(t)$ изменяется между $\theta_1 \leqslant \theta_2$, где одна из этих величин – θ_0, а другая – $\arccos(\frac{1}{2}(\lambda_0 - \sqrt{\lambda_0^2 + 4(1 + \lambda_0\cos\theta_0)})$;

(6)^3 для получения $\psi(t)$ надо будет интегрировать уравнение

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{c}{ml^2\sin^2\theta(t)} \ ; \tag{62}$$

(7)^4 если θ_* – относительное равновесие в задаче (точка равномерно движется по горизонтальной окружности), то частота малых колебаний по θ вблизи него равна

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}\frac{3\sin^2\theta_* + 1}{\sin\theta_*}} \ . \tag{63}$$

53)[4] ВОЛЧОК ЛАГРАНЖА. Рассмотрим вращение твердого тела вокруг неподвижной точки в поле силы тяжести. Предположим при этом, что с телом связаны главные оси инерции, причем тело *динамически симметрично*, то есть два момента инерции равны: $A = B$. Масса равна M, и пусть центр масс лежит на третьей оси инерции на расстоянии l от неподвижной точки. Неподвижную ось z направим по вертикали вверх. Показать, что в углах Эйлера

(1) кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2}[A\dot{\theta}^2 + (C\cos^2\theta + A\sin^2\theta)\dot{\psi}^2 + 2C\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta + C\dot{\varphi}^2] \ ,$$

а потенциальная $V = Mgl\cos\theta$;

(2) циклические интегралы суть

$$(C\cos^2\theta + A\sin^2\theta)\dot{\psi} + C\dot{\varphi}\cos\theta = c \ ; \quad C\dot{\varphi} + C\dot{\psi}\cos\theta = k \ ,$$

(3) зафиксировав константы c, k и h, показать, что движение оси динамической симметрии (углы θ, ψ) описывается двумя дифференциальными уравнениями – первое из них

$$\tfrac{A}{2}\dot{\theta}^2 + V_{ck}(\theta) = h \ ,$$
$$V_{ck}(\theta) = \frac{(c - k\cos\theta)^2}{2A\sin^2\theta} + \frac{k^2}{2C} + Mgl\cos q \quad ;$$

(4) ОВД для θ дается неравенством $V_{ck}(\theta) \leqslant h$, так что, вообще говоря, угол θ колеблется в пределах $[\theta_1(c,k,h), \theta_2(c,k,h)]$;

(5) второе уравнение – для угла ψ буквально интегрируется:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{c - k\cos\theta(t)}{A\sin^2\theta(t)} \ ;$$

(6) функция $\psi(t)$ будет монотонной, если $\arccos c/k \in [\theta_1, \theta_2]$.

Примечания