Сведения из векторной алгебры.

Скалярное произведение двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ вычисляется по формулам

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = ab\cos\psi, \tag{1}$$

где ψ — угол между векторами, a, b — их модули.

Зафиксируем ориентацию нашего трехмерного евклидова пространства $\boldsymbol{R}^3$. Наглядно говоря, это значит, что отныне действует соглашение применять только правые реперы — такие, что базисные векторы, глядя им навстречу, можно по порядку осмотреть против часовой стрелки.

Векторное произведение $[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]$ ортогонально сомножителям $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, его модуль $|[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]| = ab|\sin\psi|$, тройка векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]$ есть правая. Векторное произведение можно записать в виде формального определителя:

$$[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & a_x & b_x \\ \boldsymbol{e}_y & a_y & b_y \\ \boldsymbol{e}_z & a_z & b_z \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Векторное произведение невырождено в том смысле, что для каждого ненулевого вектора $\boldsymbol{a}$ существует такой $\boldsymbol{b}$, что их векторное произведение отлично от нуля. Более точно, $[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}] = 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны.

Обратите внимание, что и скалярное и векторное произведения имеют два эквивалентных определения и соответственно два способа вычисления: геометрический (с использованием модулей векторов и угла между ними) и аналитический (оперирующий с компонентами векторов в ортонормированном репере). На практике приходится пользоваться обоими, причем от выбора удачного способа часто зависит если не сам успех в решении задачи, то быстрота его достижения. В общих чертах справедливо следующее наблюдение: в тех случаях, когда векторы удобно расположены, в частности, когда достаточно ясен угол между ними, эффективнее геометрический способ; и если же в расположении векторов нет никакой очевидной специфики, то лучше, не торопясь, применить аналитический способ.

Когда заведомо известно направление вектора $\boldsymbol{a}$, например $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{e}_z$, то появляется соблазн написать $\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{e}_z$. В этом случае a не модуль, а, как иногда говорят, алгебраическое значение модуля — модуль со знаком. Короче, возможна вольность речи, к которой надо быть готовым.

Операции с участием трех векторов: *смешанное произведение*

$$(\boldsymbol{a},[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]) = (\boldsymbol{b},[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}]) = (\boldsymbol{c},[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]) = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}; \tag{3}$$

двойное векторное произведение

$$[\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}). \tag{4}$$

Коэффициенты здесь в нарушение общего правила написаны после векторов. Это позволяет легко запомнить формулу, прочитав ее как «бац минус цап».

Скалярное произведение билинейно, симметрично и положительно определено; векторное — билинейно, антисимметрично и удовлетворяет тождеству

$$[\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}]] + [\boldsymbol{b}\times[\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}]] + [\boldsymbol{c}\times[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]] \equiv 0. \tag{5}$$

ПРОИЗВОДНАЯ ВЕКТОРНОЙ ФУНКЦИИ:

$$\boldsymbol{f}(t) = f_x(t)\boldsymbol{e}_x + f_y(t)\boldsymbol{e}_y + f_z(t)\boldsymbol{e}_z \ RA\ \frac{d\boldsymbol{f}}{dt} \equiv \dot{\boldsymbol{f}}(t) \ \stackrel{\text{опр}}{=}\ \dot{f}_x(t)\boldsymbol{e}_x + \dot{f}_y(t)\boldsymbol{e}_y + \dot{f}_z(t)\boldsymbol{e}_z.$$

Из определения, в частности, следует, что $\dot{\boldsymbol{f}}$ не зависит от движения точки приложения вектора.

Прием вычитания. Если вектор $\boldsymbol{f}(t) = \overrightarrow{P(t)Q(t)}$, то

$$\overrightarrow{P(t)Q(t)} \equiv \overrightarrow{OQ}(t) - \overrightarrow{OP}(t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dt}\overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{v}_Q - \boldsymbol{v}_P}\,. \tag{6}$$

Это просто, но бывает очень полезно.

ПРАВИЛА ЛЕЙБНИЦА для дифференцирования произведений:

$$\frac{d}{dt}\lambda(t)\boldsymbol{f}(t) = \dot{\lambda}\boldsymbol{f} + \lambda\dot{\boldsymbol{f}},$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a}(t), \boldsymbol{b}(t)) = (\dot{\boldsymbol{a}}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}, \dot{\boldsymbol{b}}),$$

$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{a}(t) \times \boldsymbol{b}(t)] = [\dot{\boldsymbol{a}} \times \boldsymbol{b}] + [\boldsymbol{a} \times \dot{\boldsymbol{b}}].$$

ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ в данной системе отсчета задается функциями $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Их можно интерпретировать как переменные координаты некоторой движущейся геометрической точки $P(t)$, а также как компоненты ее радиуса-вектора $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OP}$, где O — точка с координатами $(0, 0, 0)$. Итак,

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{e}_x + y(t)\boldsymbol{e}_y + z(t)\boldsymbol{e}_z, \tag{7}$$

Скорость точки — это вектор, который имеет несколько эквивалентных обозначений:

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{dx}{dt}\,\boldsymbol{e}_x + \frac{dy}{dt}\,\boldsymbol{e}_y + \frac{dz}{dt}\,\boldsymbol{e}_z = \dot{x}\boldsymbol{e}_x + \dot{y}\boldsymbol{e}_y + \dot{z}\boldsymbol{e}_z. \tag{8}$$

Аналогично ускорение

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \ddot{\boldsymbol{r}} = \frac{d^2x}{dt^2}\,\boldsymbol{e}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\boldsymbol{e}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\,\boldsymbol{e}_z = \ddot{x}\boldsymbol{e}_x + \ddot{y}\boldsymbol{e}_y + \ddot{z}\boldsymbol{e}_z =$$
$$= \frac{dv_x}{dt}\,\boldsymbol{e}_x + \frac{dv_y}{dt}\,\boldsymbol{e}_y + \frac{dv_z}{dt}\,\boldsymbol{e}_z = \dot{v}_x\boldsymbol{e}_x + \dot{v}_y\boldsymbol{e}_y + \dot{v}_z\boldsymbol{e}_z = \frac{d\dot{x}}{dt}\boldsymbol{e}_x + \frac{d\dot{y}}{dt}\boldsymbol{e}_y + \frac{d\dot{z}}{dt}\boldsymbol{e}_z$$

Обычно скорость $\boldsymbol{v}_P$ прикладывается в точке $P(t)$. Но можно условиться помещать его в начало координат O. Тогда конец вектора $\boldsymbol{v}_P$ станет заметать ее *годограф скорости.*

При равномерном движении точки по окружности на годографе скорости тоже увидим равномерное движение по окружности с центром в начале координат. Отсюда легко понять, чему будет равно ускорение.

Задача I. А. Вычислить явно и нарисовать траекторию движения в плоскости, когда на годографе получается равномерное движение по окружности, проходящей через начало координат.

Ответ: в подходяжей системе координат получится циклоида.

Б. Вычислить явно и нарисовать траекторию движения в плоскости, когда на годографе получается равномерное движение по окружности, не охватывающей начало координат.

В. Вычислить явно и нарисовать траекторию движения в плоскости, когда на годографе получается равномерное движение по окружности, охватывающей начало координат.

Г. Вычислить явно и нарисовать траекторию движения в плоскости, когда на годографе получается равномерное движение по прямой, содержащей начало координат.

Д. Вычислить явно и нарисовать траекторию движения в плоскости, когда на годографе получается равномерное движение по прямой, не содержащей начало координат.

ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА. Относительно данной системы отсчета может двигаться и другое твердое тело. Говорить «скорость твердого тела» нельзя, скорость есть у каждой его точки (исключение из этого правила — *поступательное* движение тела, когда скорости всех точек одинаковы).

Теорема и определение вместе. Пусть твердое тело, в котором есть три точки, не лежащие на одной прямой, совершает достаточно гладкое движение. Тогда в каждое мгновение существует и единствен вектор $\boldsymbol{\omega}$, называемый вектором мгновенной угловой скорости тела и такой, что скорости любых двух точек тела (A и B) связаны соотношением

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \left[\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AB}\right] \tag{9}$$

Определение. Если в данное мгновение $\boldsymbol{v}_C = 0$, то имеет место *мгновенное вращение* вокруг соответствующей оси.

Вот простейшие случаи, когда ось мгновенного вращения сразу можно увидеть:

ПЕРВЫЙ) две точки тела неподвижны, и налицо обычное вращение вокруг неподвижной оси;

ВТОРОЙ) движение плоское (происходит внутри неподвижной плоскости или параллельно неподвижной плоскости): тогда вектор угловой скорости обязательно перпендикулярен этой плоскости и $\lambda = 0$; C — точка пересечения мгновенной оси вращения с плоскостью, называемая *мгновенным центром скоростей* или *мгновенным центром вращения*; эту точку легко построить геометрически, исходя из $\boldsymbol{v}_A \perp \overrightarrow{CA}$ (вообще говоря, достаточно знать направления скоростей в двух точках); отметим также, что $|\boldsymbol{v}_A| = \omega|\overrightarrow{CA}|$.

ТРЕТИЙ) одна точка тела (пусть Q) все время неподвижна, и, сверх этого, происходит *качение (без проскальзывания)* тела по неподвижной поверхности. Пусть C — точка касания. Скорость той точки P тела, которая оказалась в C, при качении **по определению** равна нулю, так что для любой другой точки тела

$$\boldsymbol{v}_A = [\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{CA}]. \tag{10}$$

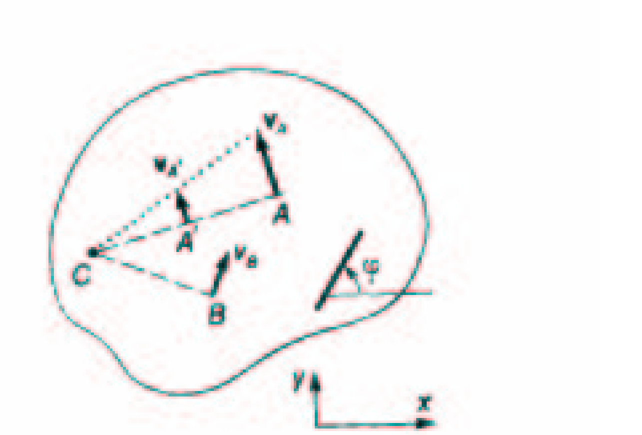
Но поскольку $\boldsymbol{v}_Q = 0$, имеем

$$0 = [\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{CQ}] \iff \boldsymbol{\omega} || \overrightarrow{CQ}\ . \tag{11}$$

Итак, вектор угловой скорости направлен по $\overrightarrow{CQ}$.

ЧЕТВЕРТЫЙ) качение может давать и две мгновенно-неподвижные точки.

ПРОСТЕЙШИЕ ПРИМЕРЫ: Диск, катящийся по прямой; конус, катящийся по плоскости; шар, катящийся в желобе, составленном из двух полуплоскостей.

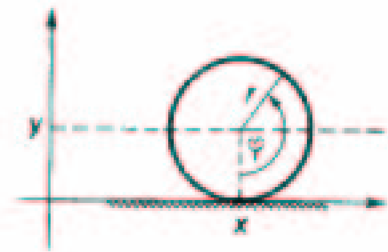


Распределение скоростей в плоском твердом теле в каждое мгновение выглядит так, как если бы это тело постоянно вращалось вокруг некоторой точки C, называемой мгновенным центром скоростей.

Изображен также способ определения абсолютного угла поворота плоского тела: на нем мысленно отмечается некоторый ориентированный отрезок и берется угол, который этот отрезок составляет с каким-либо неподвижным направлением

Задача II. А. Диск катится по прямой без проскальзывания. Пусть x — первая координата его центра A, φ — абсолютный угол поворота. Показать, что между x и φ имеется тождественное соотношение (связь). А именно

$$x + r\varphi = \text{const}.$$



РЕШЕНИЕ. Имеем

$$\boldsymbol{v}_A = [\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{CA}]; \quad \dot{x}\boldsymbol{e}_x = [\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_z \times r\boldsymbol{e}_y] = -r\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_x,$$

откуда

$$\dot{x} + r\dot{\varphi} = 0.$$

Что и требовалось. Это тождество, разумеется, понятно из чисто геометрических соображений: дуга, прокатившаяся по прямой, по длине равна пройденному центром пути. Однако в мало-мальски более сложной задаче такого рода соображения, как показывает практика, неизменно сопряжены с ошибками. Кинематические приемы намного эффективнее.

Б. Для качения диска по прямой нарисовать (точно указывая направление и сохраняя пропорции) векторы скоростей в центре, в концах вертикального и горизонтального диаметров.

В. Для равномерного качения диска по прямой написать уравнение траектории произвольной точки обода (получится циклоида).

Г. Для равномерного качения диска по прямой нарисовать (точно указывая направление и сохраняя пропорции) векторы ускорений в центре, в концах вертикального и горизонтального диаметров.

Задача III. А.Диск радиуса r катится без проскальзывания внутри окружности радиуса ρ. Абсолютный угол поворота диска пусть будет φ, а угол поворота радиуса-вектора центра диска, проведенного из центра неподвижной окружности, пусть будет θ. Найти связь между θ и φ.

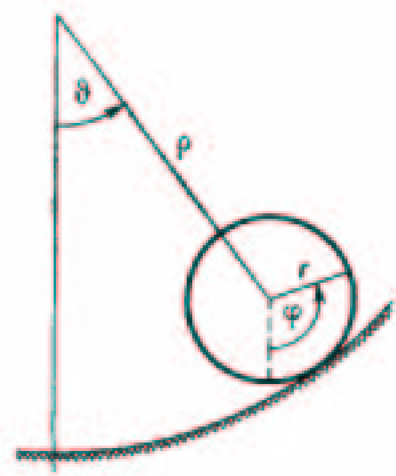
Ответ: $(\rho - r)\theta + r\varphi = \text{const}$ (а вовсе не $\rho\theta = r\varphi$ — обычный скорый ответ).

Б. Решить аналогичную задачу для диска вне окружности.

В. Решить аналогичную задачу для обруча вне окружности, но содержащего опорную окружность внутри себя (и потому имеющего больший радиус).

Г. Для равномерного качения диска внутри окружности написать уравнение траектории произвольной точки обода (получится гипоциклоида).

Д. В тех же предположениях в наинизшем положении нарисовать векторы ускорений в центре, в концах вертикального и горизонтального диаметров.



О ПЕРЕМЕЩЕНИИ МЕСТА СОПРИКОСНОВЕНИЯ. При качении тела место соприкосновения, то есть сама точка C как видимый образ имеет, вообще говоря, ненулевую скорость:

$$\boldsymbol{u}_C = \frac{d}{dt}\overrightarrow{OC}. \tag{12}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. После дифференцирования тождества (10) получаем

$$\boldsymbol{a}_A = [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{v}_A - \boldsymbol{u}_C)] + [\frac{d}{dt}\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{CA}].$$

Точка A была взята произвольно, поэтому в данное мгновение может совпасть с точкой C. Отсюда ускорение в точке касания:

$$\boldsymbol{a}_C = -[\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{u}_C]. \tag{13}$$

Этот факт бывает полезен при решении задач о распределении ускорений в твердом теле.

УГЛОВОЕ УСКОРЕНИЕ твердого тела — вектор $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$.

ПОЛЕ УСКОРЕНИЙ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ задается *формулой Ривальса*:

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + [\frac{d}{dt}\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AB}] + [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AB}]]. \tag{14}$$

Она легко получается дифференцированием формулы Эйлера, затем применением правила Лейбница, приема вычитания и снова формулы Эйлера:

$$\boldsymbol{a}_B = \frac{d}{dt}\boldsymbol{v}_B = \frac{d}{dt}\boldsymbol{v}_A + \frac{d}{dt}[\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AB}] = \underbrace{\boldsymbol{a}_A + [\frac{d}{dt}\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AB}]} + [\boldsymbol{\omega} \times \frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}] =$$

$$= \underbrace{\qquad} + [\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{v}_B - \boldsymbol{v}_A)] = \underbrace{\qquad} + [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AB}]]$$

Слагаемые в этой формуле называются отмеченным, вращательным и осестремительным ускорениями соответственно. Объясним, почему.

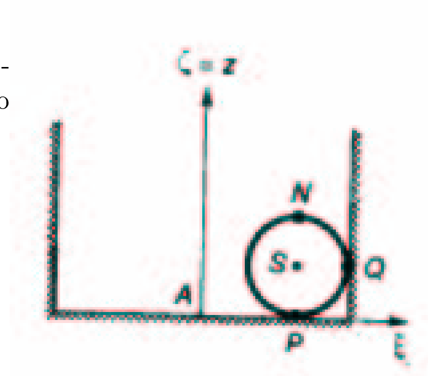
Если в данное мгновение $\boldsymbol{\omega} = 0$, то третье слагаемое пропадает, и тогда ускорения распределены аналогично скоростям. Именно поэтому второе слагаемое называется *вращательным* ускорением.

Если вдруг $\boldsymbol{a}_A = 0$ и $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$, то $\boldsymbol{a}_B = [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AB}]]$. Для простоты выберем систему координат так, что $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_\zeta$ и пусть

$$\overrightarrow{AB} = \xi \boldsymbol{e}_\xi + \eta \boldsymbol{e}_\eta + \zeta \boldsymbol{e}_\zeta, \quad [\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AB}] = \omega\xi \boldsymbol{e}_\xi - \omega\eta \boldsymbol{e}_\eta + \boldsymbol{e}_\zeta,$$

$$[\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AB}]] = -\omega^2\xi \boldsymbol{e}_\xi - \omega^2\eta \boldsymbol{e}_\eta = -\omega^2(\xi \boldsymbol{e}_\xi + \eta \boldsymbol{e}_\eta).$$

Этот вектор направлен от точки B к оси $A\zeta$ перпендикулярно последней. Поэтому третье слагаемое называется *осестремительным ускорением.*



Задача IV. Шар радиуса r катится по дну и стенке круглого цилиндрического стакана радиуса $\rho + r$. Скорость его центра постоянна и по модулю равна v.

А. Вычислить угловую скорость шара.

Б. Вычислить угловое ускорение шара.

В. Определить ускорение центра шара.

Г. Определить ускорение нижней точки шара P.

Д. Определить ускорение верхней точки шара N.

Е. Определить ускорение самой внешней точки шара Q.

Обратим внимание на центр шара S и места соприкосновения с дном и стенкой стакана P и Q. Эти точки будут неподвижны в системе координат $A\xi\eta\zeta$, вращающейся вокруг оси $A\zeta$, совпадающей с осью цилиндра, причем расположение их получится особенно простым, если мы начало A поместим на дне стакана, а ось $A\xi$ направим в точку P. Тогда скорость центра шара

$$\boldsymbol{v}_S = v\boldsymbol{e}_\eta, \tag{15}$$

угловая скорость системы координат

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{пер}} = \frac{v}{\rho}\,\boldsymbol{e}_\zeta. \tag{16}$$

Мгновенная ось вращения шара проходит через точки P и Q, которые мгновенно-неподвижны. Следовательно, абсолютная угловая скорость шара

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\,\boldsymbol{e}_\zeta - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\boldsymbol{e}_\zeta\right). \tag{17}$$

Скорость центра вычислим еще одним способом:

$$\boldsymbol{v}_S = [\boldsymbol{\Omega} \times \overrightarrow{PS}] = \frac{\Omega r}{\sqrt{2}}\,[(-\boldsymbol{e}_\zeta - \boldsymbol{e}_\xi) \times \boldsymbol{e}_\zeta] = \frac{\Omega r}{\sqrt{2}}\,\boldsymbol{e}_\eta. \tag{18}$$

Сопоставив оба выражения для скорости центра, получаем

$$\Omega = \frac{\sqrt{2}\,v}{r}. \tag{19}$$

Угловое ускорение шара

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = -\frac{\Omega}{\sqrt{2}}\,[\boldsymbol{\omega}_{\text{пер}} \times \boldsymbol{e}_\xi] = -\frac{v^2}{r\rho}\,\boldsymbol{e}_\eta. \tag{20}$$

Ускорение центра

$$\boldsymbol{a}_S = -\frac{v^2}{\rho}\,\boldsymbol{e}_\xi. \tag{21}$$

Ускорение верхней точки определяем по формуле Ривальса:

$$\boldsymbol{a}_N = \boldsymbol{a}_S + [\boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{SN}] + [\boldsymbol{\Omega} \times [\boldsymbol{\Omega} \times \overrightarrow{SN}]], \tag{22}$$

в которой $\overrightarrow{SN} = r\boldsymbol{e}_\zeta$. Получим ответ:

$$\boldsymbol{a}_N = -v^2\left(\frac{2}{\rho} - \frac{1}{r}\right)\boldsymbol{e}_\xi - \frac{v^2}{r}\,\boldsymbol{e}_\zeta. \tag{23}$$

Ясно видно, сколь целесообразным оказалось использование подвижного репера.

ФОРМУЛА СЛОЖЕНИЯ СКОРОСТЕЙ. Пусть движение некоторой точки $P(t)$ рассматривается с точки зрения двух систем координат: неподвижной $Oxyz$ и подвижной $A\xi\eta\zeta$. Один наблюдатель регистрирует функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, другой — функции $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$. Движение самой системы координат $A\xi\eta\zeta$ (это твердое тело) условно назовем переносом; соответственно этому ее угловую скорость относительно $Oxyz$ обозначим $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\text{пер}}$.

Для точки P вычисляются

абсолютная скорость: $\boldsymbol{v}_{\text{абс}} = \dot{x}\boldsymbol{e}_x + \dot{y}\boldsymbol{e}_y + \dot{z}\boldsymbol{e}_z,$

относительная скорость: $\boldsymbol{v}_{\text{отн}} = \dot{\xi}\boldsymbol{e}_\xi + \dot{\eta}\boldsymbol{e}_\eta + \dot{\zeta}\boldsymbol{e}_\zeta,$

Абсолютная скорость — сумма относительной и переносной:

$$\boldsymbol{v}_{\text{абс}} = \boldsymbol{v}_{\text{пер}} + \boldsymbol{v}_{\text{отн}},$$

где **переносная скорость** $\boldsymbol{v}_{\text{пер}} = \boldsymbol{v}_A + [\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AP}]$ есть скорость того места в подвижной системе координат, в котором в данное мгновение оказалась движущаяся точка.

ФОРМУЛА СЛОЖЕНИЯ УСКОРЕНИЙ. Имеем определения:

абсолютное ускорение: $\boldsymbol{a}_{\text{абс}} = \ddot{x}\boldsymbol{e}_x + \ddot{y}\boldsymbol{e}_y + \ddot{z}\boldsymbol{e}_z,$

относительное ускорение: $\boldsymbol{a}_{\text{отн}} = \ddot{\xi}\boldsymbol{e}_\xi + \ddot{\eta}\boldsymbol{e}_\eta + \ddot{\zeta}\boldsymbol{e}_\zeta.$

Абсолютное ускорение слагается из относительного, переносного и кориолисова (формула Кориолиса):

$$\boldsymbol{a}_{\text{абс}} = \boldsymbol{a}_{\text{пер}} + \boldsymbol{a}_{\text{отн}} + \boldsymbol{a}_{\text{кор}},$$

где **переносное ускорение** $\boldsymbol{a}_{\text{пер}} = \boldsymbol{a}_A + [\boldsymbol{\varepsilon} \times \overrightarrow{AP}] + [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AP}]],$

кориолисово ускорение $\boldsymbol{a}_{\text{кор}} = 2[\boldsymbol{\omega}_{\text{пер}} \times \boldsymbol{v}_{\text{отн}}].$

ФОРМУЛА СЛОЖЕНИЯ УГЛОВЫХ СКОРОСТЕЙ. Допустим теперь, что тело C имеет абсолютную угловую скорость $\boldsymbol{\omega}_{\text{абс}}$ в неподвижной системе отсчета и относительную угловую скорость $\boldsymbol{\omega}_{\text{отн}}$ в подвижной системе отсчета. В свою очередь подвижная система координат, напомним, имеет угловую скорость $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\text{пер}}$ относительно неподвижной. Покажем, что

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{абс}} = \boldsymbol{\omega}_{\text{пер}} + \boldsymbol{\omega}_{\text{отн}}, \tag{24}$$

т. е. абсолютная угловая скорость равна сумме относительной и переносной.

Формула сложения угловых ускорений:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{абс}} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{пер}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{отн}} + [\boldsymbol{\omega}_{\text{пер}} \times \boldsymbol{\omega}_{\text{отн}}]. \tag{25}$$

Комментарии и доказательство оставляются в качестве упражнения.

ЗАМЕТКИ ДЛЯ ПАМЯТИ. Чтобы предупредить те многочисленные ошибки, которые связаны с применением понятий переносной скорости и переносного ускорения, обратим внимание на то, что $\boldsymbol{v}_{\text{пер}}$, $\boldsymbol{a}_{\text{пер}}$ в общем случае не являются скоростью и ускорением начала координат:

$$\boldsymbol{v}_{\text{пер}} \neq \boldsymbol{v}_A, \boldsymbol{a}_{\text{пер}} \neq \boldsymbol{a}_A; \tag{26}$$

затем на то, что $\boldsymbol{v}_{\text{пер}}$, $\boldsymbol{a}_{\text{пер}}$ вообще не являются скоростью и ускорением какой-либо одной движущейся точки: в каждое мгновение это скорость и ускорение, вообще говоря, некоторой новой точки, нового следа, который точка P оставляет на твердом теле, связанном с подвижной системой координат.

Кориолисово ускорение также доставляет много хлопот. В нем странно все: и множитель 2, и векторные сомножители, один из которых — переносная угловая скорость тела, другой, наоборот, — относительная линейная скорость точки (добавим на всякий случай, что выражения «угловая скорость точки» и «скорость тела» в равной степени некорректны).

В формулах, относящихся к скоростям, — всегда по два слагаемых, а относящихся к ускорениям — всегда по три. При этом в формуле для ускорения есть два слагаемых, по смыслу аналогичных членам в формуле для скоростей, а третье слагаемое имеет вид «странного» векторного произведения.

В учебных задачах, как правило, встречаются не материальные точки, а твердые тела. В этом случае при вычислении импульса, кинетического момента или кинетической энергии тела надо исходить из того, что пространственное твердое тело характеризуется массой M, положением центра масс $Ц$, тремя главными центральными направлениями $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}'$, $\boldsymbol{e}''$ и соответствующими главными центральными моментами инерции A, B, C. Пусть в некоторой «неподвижной» системе координат $Oxyz$ точка $Ц$ имеет радиус-вектор $\boldsymbol{s} = \overrightarrow{OЦ}$, и пусть угловая скорость тела относительно $Oxyz$ разложена по (правому) главному реперу:

(27) $$\boldsymbol{\omega} = p\boldsymbol{e} + q\boldsymbol{e}' + r\boldsymbol{e}''.$$

Тогда

импульс $\boldsymbol{P} = M\dot{\boldsymbol{s}}$,

собственный кинетический момент $\boldsymbol{\Lambda}_Ц = Ap\boldsymbol{e} + Bq\boldsymbol{e}' + Cr\boldsymbol{e}''$,

полный кинетический момент $\boldsymbol{\Lambda}_O = M[\boldsymbol{s} \times \dot{\boldsymbol{s}}] + \boldsymbol{\Lambda}_s$,

кинетическая энергия

(28) $$T = \frac{M}{2}\,\dot{\boldsymbol{s}}^2 + \frac{1}{2}\,(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2).$$

Момент инерции относительно оси $A\boldsymbol{e}$, то есть оси с направлением $\boldsymbol{e}$, проходящей через точку A:

(29) $$I_{A\boldsymbol{e}} = \sum m_\nu d^2(m_\nu, A\boldsymbol{e})$$

Здесь $d(m_\nu, A\boldsymbol{e}) = \left|\left[\boldsymbol{e} \times \overrightarrow{Am_\nu}\right]\right|$ есть расстояние от точки m_ν до упомянутой оси. Тогда

(30) $$I_{O\boldsymbol{e}} \quad \equiv \quad Md^2 + I_{Ц\boldsymbol{e}},$$

это формула Гюйгенса-Штейнера, в которой $I_{Ц\boldsymbol{e}}$ — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс и параллельной $\boldsymbol{e}$, d — расстояние между осями $O\boldsymbol{e}$ и $Ц\boldsymbol{e}$;

В случае плоских движений (пусть в плоскости Oxy) вводится абсолютный угол φ поворота твердого тела от некоторого неподвижного направления; угол φ отсчитывается против часовой стрелки, если смотреть навстречу вектору $\boldsymbol{e}_z$. Тогда

(31) $$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_z, \quad \Lambda_Ц = I\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_z, \quad T = \frac{M\dot{s}^2}{2} + \frac{I\dot{\varphi}^2}{2}.$$

При решении задач со сложной кинематикой полезно принимать подвижные системы координат $A\xi\eta\zeta$ с целью получить компактные разложения тех или иных векторных величин: скоростей и ускорений отдельных точек системы, угловых ускорений и скоростей тела, кинетических моментов, сил и моментов сил (укажем, например, на применение осей Кенига или подвижного репера главных направлений твердого тела с неподвижной точкой). Полезно сделать выбор подвижной системы координат осознанно, другими словами, применять такую методику обращения с чертежом, которая как бы сама собой приводила бы к удобной системе координат, т. е. учитывала бы взаимное разложение частей механической системы, ее характерные черты свойства симметрии и т.д.

Принцип явно важных точек.

Подвижную систему координат надо вводить таким образом, чтобы в ней

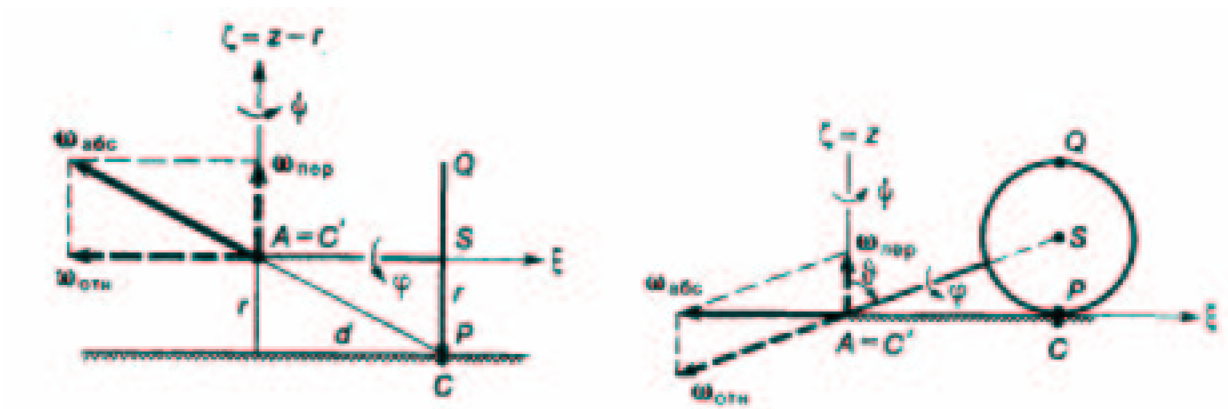
точки соприкосновения тел,

геометрические центры тел, центры масс

точки приложения сил

имели возможно более простые траектории. При этом желательно, чтобы оси двигались также по возможности просто.

Нужно еще следить за неизбежно возникающими подвижными реперами, но это уже более высокий уровень понимания.



Диск со штангой (AS) и шар со штангой (AS) катятся по плоскости; конец штанги (A) неподвижен (изображен вид сечения). Присмотритесь: явно важные точки здесь обозначены A, P, S. Мгновенная ось вращения CC' проходит через неподвижную точку $A = C'$ и через ту точку диска или шара P, которой катящееся тело в данное мгновение соприкасается с плоскостью ($P = C$): скорость этой точки (в данное мгновение) равна нулю. Вместе с тем сама точка касания C как видимый образ движется по плоскости с ненулевой скоростью. Подвижная система координат (угол поворота ψ) вращается так, что в ней точка касания неподвижна и происходит вращение тела вокруг штанги. Указанное на чертеже направление отсчета угла φ не совпадает с фактическим направлением вращения.

Задача V. А. К диску радиуса r ортогонально прикреплена в центре штанга длины d. Диск катится по горизонтальной плоскости так, что свободный конец штанги A неподвижен на высоте r над плоскостью. Пусть ψ — абсолютный угол поворота штанги вокруг вертикали, φ — угол поворота диска в подвижной системе координат $A\xi\eta\zeta$ такой, что ось $A\zeta$ вертикальна, ось $A\xi$ направлена по штанге. Вычислить связь между ψ, φ. Имеем

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{отн}} = \dot\varphi \boldsymbol{e}_\xi, \boldsymbol{\omega}_{\text{пер}} = \dot\psi \boldsymbol{e}_\zeta, \boldsymbol{\omega}_{\text{абс}} = \dot\varphi \boldsymbol{e}_\xi + \dot\psi \boldsymbol{e}_\zeta. \tag{32}$$

С другой стороны, скорость в точке касания

$$\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_O + [\boldsymbol{\omega}_{\text{абс}} \times \overrightarrow{OP}] = 0, \quad \boldsymbol{v}_O = 0,$$

так что

$$[\boldsymbol{\omega}_{\text{абс}} \times \overrightarrow{OP}] = 0,$$
$$[(\dot\varphi \boldsymbol{e}_\xi + \dot\psi \boldsymbol{e}_\zeta) \times (d\boldsymbol{e}_\xi - r\boldsymbol{e}_\zeta)] \equiv 0,$$
$$r\dot\varphi + d\dot\psi = 0,$$

что и требовалось.

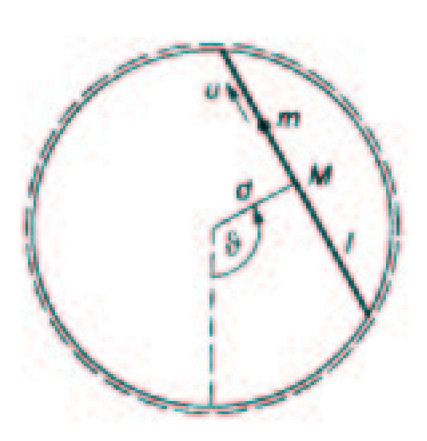
Задача VI. А. Шар с ортогонально прикрепленной к нему штангой длины $l - r$ катится по горизонтальной плоскости так (рис. 12), что свободный конец штанги неподвижно лежит на плоскости. Пусть v — абсолютная скорость центра шара. Определить абсолютную и относительную угловые его скорости в системе $A\xi\eta\zeta$, в которой горизонтальная ось $A\eta$ перпендикулярна штанге. Ответ:

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{абс}} = -\frac{v}{r}\,\boldsymbol{e}_\xi, \quad \boldsymbol{\omega}_{\text{отн}} = -\frac{v}{r}\,\boldsymbol{e}_\xi - \frac{v}{\sqrt{l^2 - r^2}}\,\boldsymbol{e}_\zeta. \tag{33}$$

Задание Б. Чему равны углы Эйлера для указанных тел? Не торопитесь с ответом.
Задание В. Вычислить и изобразить кинетические моменты относительно точки A для обоих тел. Штангу считать невесомой.
Задание Г. Вычислить кинетическую энергию обоих тел.

Задача VII. Прямая трубка длиной $2l$ лежит концами на окружности и по ней скользит, поворачиваясь с угловой скоростью $\dot\theta = \omega$. В трубке от середины M к концу движется точка, с относительной скоростью u, причем при $t = 0$ она была как раз в середине. А. Вычислить модуль абсолютного ускорения точки. Теорему косинусов не применять.

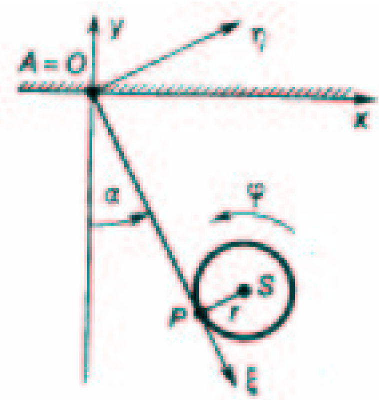
Б. Обобщение. Пусть $u = u(t)$, $\omega = \omega(t)$. Написать разумное выражение для вектора абсолютного ускорения. Рекомендуется вводить сокращающие обозначения и писать примерно так: «Ответ: (*), где (**)».



Задача VIII. В вертикальной плоскости движется обруч, на который намотана невесомая нить; конец ее закреплен на потолке, а сама она все время натянута. Пусть s — длина смотавшейся нити, α — угол между вертикалью и нитью, φ — абсолютный угол поворота обруча.

А. Найти связь между s, α, φ. И вообще, разобраться в кинематике.

Б. Вычислить импульс, кинетический момент относительно точки A и кинетическую энергию тела массы M, считая заданными $\alpha(t), s(t)$.



Применим подвижную систему координат. Явно важными точками являются: центр обруча S, точка касания P нити с обручем, точка A закрепления нити. Отметим эти точки на чертеже (рис. 37). Если мы оси направим по PS, PA, то в полученной системе координат все точки будут неподвижны. Однако движение самой системы не очень просто: и начало движется, и оси вращаются. Выберем такую, у которой начало неподвижно. Для этого поместим начало в точке A, а ось $A\xi$ направим по AP. В этой системе координат точка A неподвижна, а точки P и S движутся по оси $A\xi$ и по параллельной прямой соответственно. Конечно, это — простые траектории. Ось $A\eta$ направим вправо–вверх. Угловая скорость системы координат

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{пер}} = \dot\alpha \boldsymbol{e}_\zeta, \tag{34}$$

где $\boldsymbol{e}_\zeta = \boldsymbol{e}_z$ — вектор, ортогональный плоскости движения.

Вычислим скорость центра обруча, разложив ее на относительную и переносную. Имеем

$$\boldsymbol{v}_{\text{отн}} = \dot s \boldsymbol{e}_\xi, \tag{35}$$

$$\text{заметим, что } \overrightarrow{AS} = s\boldsymbol{e} + r\boldsymbol{e}_\eta \text{ — полезный прием!} \tag{36}$$

$$\boldsymbol{v}_{\text{пер}} = [\dot\alpha \boldsymbol{e}_\zeta \times \overrightarrow{AS}] = [\dot\alpha \boldsymbol{e}_\zeta \times (s\boldsymbol{e} + r\boldsymbol{e}_\eta)] = \tag{37}$$

$$= \dot\alpha s[\boldsymbol{e}_\zeta \times \boldsymbol{e}_\xi] + \dot\alpha r[\boldsymbol{e}_\xi \times \boldsymbol{e}_\eta] = -r\dot\alpha \boldsymbol{e}_\xi + s\dot\alpha \boldsymbol{e}_\eta. \tag{38}$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{v}_{\text{абс}} = (\dot s - r\dot\alpha)\boldsymbol{e}_\xi + s\dot\alpha \boldsymbol{e}_\eta. \tag{39}$$

Пусть теперь φ — угол поворота обруча в неподвижной плоскости. Тогда его абсолютная угловая скорость

$$\boldsymbol{\Omega}_{\text{абс}} = \dot\varphi \boldsymbol{e}_z = \dot\varphi \boldsymbol{e}_\zeta. \tag{40}$$

Угловая скорость системы координат уже вычислена, так что относительная угловая скорость обруча

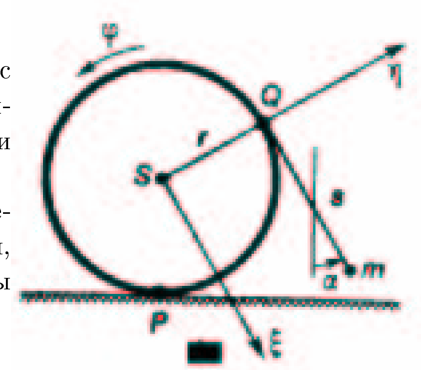
$$\boldsymbol{\Omega}_{\text{отн}} = \boldsymbol{\Omega}_{\text{абс}} - \boldsymbol{\omega}_{\text{отн}} = (\dot\varphi - \dot\alpha)\boldsymbol{e}_\zeta. \tag{41}$$

В подвижной системе координат обруч катится по оси $O\xi$. Отсюда относительная скорость его центра

$$\boldsymbol{v}_{\text{отн}} = [\boldsymbol{\Omega}_{\text{отн}} \times \overrightarrow{PS}] = (\dot\varphi - \dot\alpha) r [\boldsymbol{e}_\zeta \times \boldsymbol{e}_\eta], \tag{42}$$

и, сравнив с предшествующим вычислением, имеем связь

$$\dot s - r(-\dot\varphi + \dot\alpha) = 0. \tag{43}$$



Задача IX. Обруч радиуса r, на который намотана невесомая нить с точкой m на конце, катится по горизонтальной прямой с коэффициентом трения скольжения k. Пусть φ — абсолютный угол его поворота и α — угол отклонения нити от вертикали.
А. Вычислить скорость точки m. Б. Вычислить импульс, кинетический момент относительно точки A и кинетическую энергию системы, считая, что известна масса обруча M (и точки, конечно - m) и заданы $\alpha(t), s(t)$.

Если (x, y) — координаты центра обруча, то при качении (вычислить $\boldsymbol{v}_S$ двумя способами)

$$r\dot\varphi + \dot x = 0. \tag{44}$$

Пусть также s — длина смотавшейся нити.

Для вычислений нам потребуются подвижная система координат. Явно важные точки здесь — центр обруча S, точка P соприкосновения с прямой, точка Q касания нити, точка m. Начало подвижной системы координат помещаем в S, а ось направляем по SQ. Тогда в этой системе координат точки S, Q неподвижны, точка P движется по окружности радиуса r, точка m движется по прямой, параллельной оси $O\xi$.

Угловая скорость системы координат

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{пер}} = \dot\alpha \boldsymbol{e}_\zeta,$$

относительная угловая скорость обруча

$$\boldsymbol{\Omega}_{\text{отн}} = (\dot\varphi - \dot\alpha)\boldsymbol{e}_\zeta.$$

Относительная скорость m вычисляется двумя способами:

$$\boldsymbol{v}_{\text{отн}} = \dot s \boldsymbol{e}_\xi = -r(\dot\varphi - \dot\alpha)\boldsymbol{e}_\xi,$$

откуда

$$\dot s = r(\dot\alpha - \varphi), \quad s = r(\alpha - \varphi).$$

Константа интегрирования гасится произволом в выборе φ.

Переносная скорость точки m равна

$$\boldsymbol{v}_{\text{пер}} = \boldsymbol{v}_S + [\boldsymbol{\omega}_{\text{пер}} \times \overrightarrow{Sm}] =$$

$$(\text{заметим, что } \overrightarrow{Sm} = s\boldsymbol{e} + r\boldsymbol{e}_\eta \text{ — полезный прием!})$$

$$= (-r\dot\varphi \sin\alpha - r\dot\alpha)\boldsymbol{e}_\xi + (-r\dot\varphi\cos\alpha + s\dot\alpha)\boldsymbol{e}_\eta,$$

наконец, абсолютная при $\alpha = 0$

$$\boldsymbol{v}_{\text{абс}}|_{\alpha=0} = -r\dot\varphi \boldsymbol{e}_\xi + (r\dot\varphi + s\dot\alpha)\boldsymbol{e}_\eta.$$

ГЛАВНЫЙ РЕПЕР ДЛЯ ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ.

Пусть известно, что $\boldsymbol{v}_Q \equiv 0$. С телом можно связать подвижный репер $Q\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ (называемый главным, или центральным) такой, что

$$T_Q = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \tag{45}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_Q = Ap\boldsymbol{e}_1 + Bq\boldsymbol{e}_2 + Cr\boldsymbol{e}_3 \tag{46}$$

где A, B, C — моменты инерции относительно осей $Q\boldsymbol{e}_1$, $Q\boldsymbol{e}_2$, $Q\boldsymbol{e}_3$ соответственно, а p, q, r — проекции $\boldsymbol{\omega}$ на эти оси:

$$\boldsymbol{\omega} = p\boldsymbol{e}_1 + q\boldsymbol{e}_2 + r\boldsymbol{e}_3 \tag{47}$$

Надо понимать, что реперы $Ц\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ и $Q\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ ориентированы по-разному и соответствующие моменты инерции — тоже разные; точнее было бы писать A_Q, B_Q, C_Q и так далее.

Дополнительные подробности о кинетической энергии. Возьмем какой-нибудь репер $Ц\boldsymbol{e}_\xi\boldsymbol{e}_\eta\boldsymbol{e}_\zeta$, жестко связанный с телом. Пусть

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_\xi\boldsymbol{e}_\xi + \omega_\eta\boldsymbol{e}_\eta + \omega_\zeta\boldsymbol{e}_\zeta$$

Вычисляем

$$\begin{gathered} 2T_Ц(\boldsymbol{\omega}) = \sum_\nu m_\nu\,[\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}_\nu]^2 = \sum_\nu m_\nu\left(\boldsymbol{\omega}^2\boldsymbol{\rho}^2 - (\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{\rho})^2\right) = \\ = (\omega_\xi^2+\omega_\eta^2+\omega_\zeta^2)\sum_\nu m_\nu(\xi_\nu^2+\eta_\nu^2+\zeta_\nu^2) - \sum_\nu m_\nu(\omega_\xi\xi_\nu+\omega_\eta\eta_\nu+\omega_\zeta\zeta_\nu)^2 = \\ I_\xi\omega_\xi^2 + I_\eta\omega_\eta^2 + I_\zeta\omega_\zeta^2 - 2J_{\eta\zeta}\omega_\eta\omega_\zeta - 2J_{\zeta\xi}\omega_\zeta\omega_\xi - 2J_{\xi\eta}\omega_\xi\omega_\eta, \end{gathered}$$

где $I_\xi = \sum m_\nu(\eta_\nu^2+\zeta_\nu^2) = I_{Ц\boldsymbol{e}_\xi}$ — момент инерции относительно оси $Ц\boldsymbol{e}_\xi$; моменты I_η, I_ζ определяются аналогично, $J_{\eta\zeta} = \sum_\nu m_\nu\eta_\nu\zeta_\nu = J_{Ц\boldsymbol{e}_\eta\boldsymbol{e}_\zeta}$ — произведение инерции или *центробежный момент инерции.*

Квадратичная форма $T_Ц(\boldsymbol{\omega})$ имеет матрицу (*матрица инерции*)

$$\begin{pmatrix} I_\xi & -J_{\xi\eta} & -J_{\xi\zeta} \\ -J_{\xi\eta} & I_\eta & -J_{\eta\zeta} \\ -J_{\xi\zeta} & -J_{\eta\zeta} & I_\zeta \end{pmatrix}$$

В главных осях матрица инерции имеет диагональный вид $\operatorname{diag}(A,B,C)$.

Матрице инерции отвечает линейный *оператор инерции* или (более старый термин) *тензор инерции*; применяя его к вектору угловой скорости, получим как раз кинетический момент $\boldsymbol{\Lambda}_Ц$.

Задача X. Проверить, что выполняются неравенства типа

А) $I_\xi \leqslant I_\eta + I_\zeta$ (неравенства треугольника);

Б) $J_{\eta\zeta} \leqslant I_\eta I_\zeta$;

В) $4J_{\eta\zeta}^2 \leqslant I_\xi^2 - (I_\eta - I_\zeta)^2$.

Какое из этих неравенств сильнее?

Г) Тело является плоским тогда и только тогда, когда $I_\zeta = I_\xi + I_\eta$. Доказать.

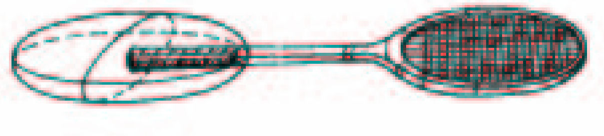
КИНЕТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ КАК ГРАДИЕНТ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ.

Например,

$$\boldsymbol{\Lambda}_Ц = \frac{\partial T_Ц}{\partial p}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial T_Ц}{\partial q}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\partial T_Ц}{\partial r}\boldsymbol{e}_3 \tag{48}$$

ЭЛЛИПСОИД ИНЕРЦИИ. Это поверхность в главных осях: $\boldsymbol{\rho} \in \{A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1\}$.

Задача XI. Эллипсоид инерции сжат в направлении главной оси, отвечающей наибольшему моменту инерции, и вытянут в направлении оси с наименьшим моментом. Объяснить



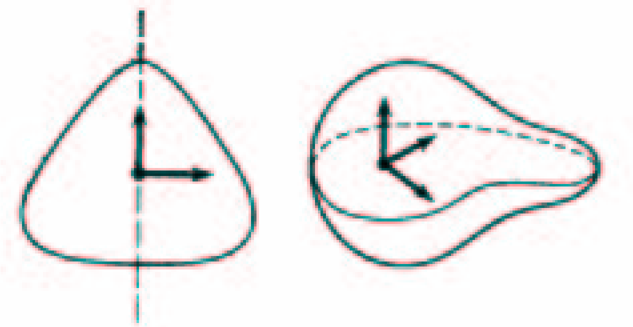
Главная ось – это ось, проходящая через точку Q и коллинеарная главному вектору (то есть одному из базисных векторов выбранного репера).

Главная плоскость – это плоскость, проходящая через точку Q и перпендикулярная одному из главных векторов. Из определения сразу следует, что главная плоскость содержит два других главных вектора.

Примечание. Главная центральная (то есть проходящая через центр масс) ось является главной для всех своих точек (доказать).

ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ СИММЕТРИИ при нахождении главных плоскостей и осей.

Задача XII. 0) если распределение масс обладает плоскостью симметрии или осью симметрии, то центр масс лежит в этой плоскости или на этой оси;



Задача XIII.

1) Ось симметрии распределения масс – главная;

2) Плоскость симметрии распределения масс – главная.

Задача XIV. Утверждения-упражнения, полезные при практическом поиске центров масс и моментов инерции.

А) Соображение разбиения: если система материальных точек разбита на части №i с центрами масс $Ц_i$ и массами M_i, то центр масс системы совпадает с центром масс семейства $M_1, M_2, \dots$.

Б) Соображение параллельности: если массы переносить параллельно оси, то момент инерции относительно нее не меняется.

В) *Момент инерции относительно плоскости* П, перпендикулярной направлению $\boldsymbol{e}$ и проходящей через точку A определяется так:

$$J_{A\boldsymbol{e}} = \sum m_\nu \left(\boldsymbol{e}, \overrightarrow{Am_\nu}\right)^2$$

Здесь $|(\boldsymbol{e}, \overrightarrow{Am_\nu})|$ есть расстояние от точки m_ν до упомянутой плоскости.

Соображение растяжения: если распределение масс №2 получено из распределение масс №1 увеличением всех расстояний до плоскости П в $\varkappa$ раз, то $J_{A\boldsymbol{e}}$ увеличится $\varkappa^2$ раз.

Г) Для векторов ортогонального репера

$$I_{A\boldsymbol{e}_1} = J_{A\boldsymbol{e}_2} + J_{A\boldsymbol{e}_3} \tag{49}$$

На практике моменты инерции обычно даются интегралами, а не суммами. Вышеуказанные соображения позволяют в простых случаях сразу свести задачу к вычислению интеграла функции от одной переменной.

ПРИМЕРЫ вычисления главных центральных моментов инерции относительно оси, перпендикулярной плоскости тела (плоскость $Цxy$).

Задача XV. Однородный отрезок длины $2a$, расположенный вдоль оси x (сразу $A=0$). Разбиваем отрезок на малые кусочки длины Δx_i с координатой середины x_i; поскольку плотность массы равна $M/2\mathrm{a}$, имеем момент инерции:

$$B = C = \sum \frac{M}{2\mathrm{a}} \Delta x_i \cdot x_i^2.$$

Это — интегральная сумма для

$$B = C = \int_{-\mathrm{a}}^{\mathrm{a}} \frac{M}{2\mathrm{a}} x^2\,dx = \frac{M}{2\mathrm{a}} \frac{x^3}{3} \Big|_{-\mathrm{a}}^{\mathrm{a}} = \frac{M\mathrm{a}^2}{3}.$$

Задача XVI. Однородная окружность радиуса $a:$ $C = Ma^2$, что очевидно; далее, $A+B=C$ (тело плоское) и $A=B$; отсюда $A=B=Ma^2/2$.

Задача XVII. Однородный круг радиуса $a:$ разбиваем его на кольца шириной Δr_i радиуса r_i; поскольку плотность массы есть $\dfrac{M}{\pi a^2}$, масса кольца равна $\dfrac{M}{\pi a^2} \cdot 2\pi r_i \Delta r_i$; момент инерции

$$C = \sum \frac{M}{a^2} 2 r_i \Delta r_i \cdot r_i^2.$$

Это — интегральная сумма для

$$C = \int_0^{\mathrm{a}} \frac{M}{\mathrm{a}^2} 2r^3\,dr = \frac{M}{\mathrm{a}^2} \frac{r^4}{2} \Big|_0^{\mathrm{a}} = \frac{M\mathrm{a}^2}{2}.$$

Опять $A = B = C/2$.

Задача XVIII. Однородный прямоугольник $2a \times 2b$. Момент инерции B такой же, как у палочки длины a (соображение параллельности), отсюда $B = Ma^2/3$, $A = Mb^2/3$, $C = A+B$.

Задача XIX. У однородного квадрата со стороной $2a$ имеем $A = B = Ma^2/3$, так что момент относительно диагонали $d = 2\sqrt{2}a$ тоже $Ma^2/3 = Md^2/24$.

Задача XX. Однородный треугольник. Здесь проще вычислить сначала момент I_{c,h_c} относительно стороны. Если дана сторона c и высота h_c, то момент инерции у любого треугольника такой же, как у равнобедренного, а момент у равнобедренного, очевидно, получается (соображение растяжения) умножением на $\left(\frac{h_c}{c/2}\right)^2$. из момента у прямоугольного равнобедренного. Последний же такой, как у квадрата массы M, то есть $Mc^2/24$. Итак, $I_{c,h_c} = \frac{1}{6}h_c^2$.

Задача XXI. Центр масс треугольника лежат на пересечении медиан. Это становится ясным из соображения разбиения, если мысленно разрезать треугольник на тонкие полоски, параллельные стороне. Пересечение медиан находится на расстоянии $h_c/3$ от стороны c, так что по формуле Гюйгенса-Штейнера центральный момент инерции относительно оси, параллельной стороне, равен $I_{c,h_c} - M(h_c/3)^2 = \frac{1}{18}h_c^2$.

Задача XXII. Если поместить равные массы в вершины треугольника, то центр масс по-прежнему будет лежать на пересечении медиан. Результаты предыдущих двух абзацев показывают, что главные оси и моменты инерции у однородного треугольника такие же, как у трех масс $M/6$, помещенных в вершинах треугольника. Еще лучше: такие же, как у трех масс $M/3$, помещенных в основаниях медиан.

ПРИМЕРЫ вычисления центральных моментов инерции относительно оси у пространственных тел.

Задача XXIII. Однородная сфера радиуса $a:$ полный момент инерции $I = Ma^2$, что очевидно. Но $A+B+C = 2I$ и $A=B=C$ из симметрии. Отсюда $A=B=C=\frac{2}{3}Ma^2$.

Задача XXIV. Однородный шар радиуса $a:$ рассуждая, как для диска, имеем

$$I = \int_0^{\mathrm{a}} \frac{M}{\dfrac{4}{3}\pi \mathrm{a}^3} 4\pi r^2\,dr \cdot r^2 = \frac{3M\mathrm{a}^2}{5},$$

так что $A = B = C = \frac{2}{3}I = \frac{2}{5}Ma^2$.

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.

Пусть твердое тело имеет некоторую неподвижную ось: прямую OP, закрепленную в точке P (подшипник) и в точке O (подпятник). Для упрощения будем считать, что ось вертикальная.

Угловая скорость тела $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{e}_z$. В главном репере $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ имеем

$$\boldsymbol{e}_z = \alpha \boldsymbol{e}_1 + \beta \boldsymbol{e}_2 + \gamma \boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{\omega} = p\boldsymbol{e}_1 + q\boldsymbol{e}_2 + r\boldsymbol{e}_3,$$

где $p = \omega\alpha$, $q = \omega\beta$, $r = \omega\gamma$. причем сейчас α, β, γ — константы. Кинетический момент

$$\boldsymbol{\Lambda} \equiv \boldsymbol{\Lambda}_O = Ap\boldsymbol{e}_1 + Bq\boldsymbol{e}_2 + Cr\boldsymbol{e}_3 \tag{50}$$

Важно отметить, что $\Lambda_z = I_{Oz}\omega$; вместе с тем

$$\Lambda_z = \boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{e}_z = Ap\alpha + Bq\beta + Cr\gamma = \omega(A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2) \quad I_{O\boldsymbol{e}} = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2.$$

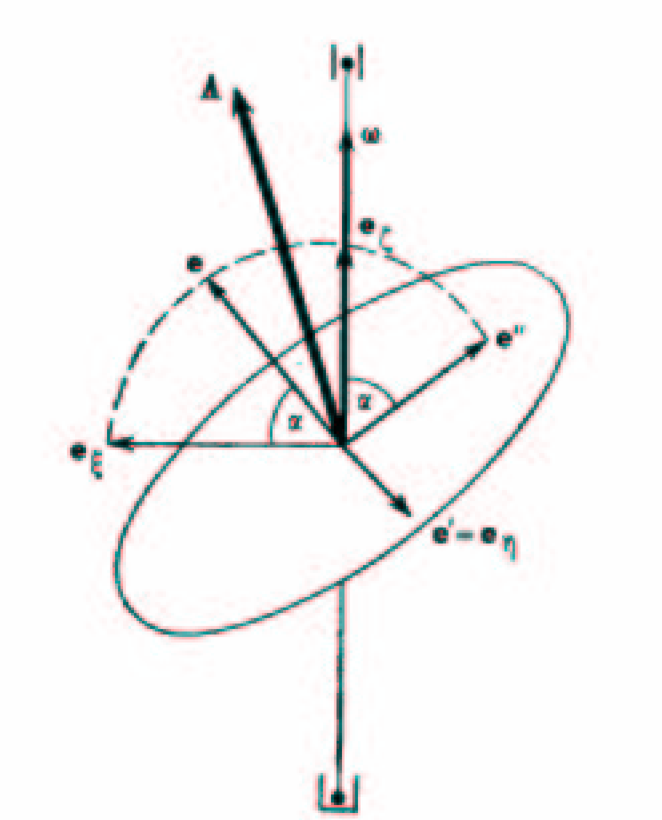
Кинетическая энергия:

$$T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Lambda} = \frac{1}{2} I_{O\boldsymbol{e}} \frac{\omega^2}{2} = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = \frac{\omega^2}{2}(A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2).$$

Введем Θ — важный УГОЛ МЕЖДУ УГЛОВОЙ СКОРОСТЬЮ И КИНЕТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ: $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Lambda}) = \omega\Lambda\cos\Theta$. Видим, что $\cos\Theta$ вычисляется через A, B, C, α, β, γ :

$$\cos\Theta = \frac{(\omega, \Lambda)}{\omega\Lambda} = \frac{A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2}{\sqrt{A^2\alpha^2 + B^2\beta^2 + C^2\gamma^2}}; \quad T = \frac{1}{2}\omega\Lambda\cos\Theta.$$

В случае вертикальной оси вращения Θ — угол между $\boldsymbol{\Lambda}$ и осью z.



Задача XXV. Вращающийся диск. Пример того, что кинетический момент твердого тела с неподвижной точкой в общем случае не коллинеарен вектору угловой скорости (если ось вращения не является главной). Это расхождение — почти недоступное зрительному восприятию — является ключом к объяснению закономерностей динамики твердого тела, некоторые из которых поначалу кажутся странными. В данном частном случае в концах оси вращения возникают значительные боковые усилия (ведущие к износу подшипников), несмотря на то что центр масс диска находится на оси вращения.

А. Вычислить угол между кинетическим моментом и осью вращения.

Б. Доказать, что вращение будет равномерным.

В. Вычислить реакции в подшипниках.

Решение. Ось проходит через центр *Ц* диска под углом α к его плоскости и кончается в точках A_1, A_2, находящихся на расстоянии d от *Ц*. Требуется а) доказать, что $\dot{\psi} = \mathrm{const}$; б) вычислить реакцию в точках опоры A_1 и A_2.

Выпишем динамические уравнения

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2, \tag{51}$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\Lambda}_{Ц} = [\overrightarrow{ЦA_1} \times \boldsymbol{R}_1] + [\overrightarrow{ЦA_2} \times \boldsymbol{R}_2]. \tag{52}$$

Введем два репера, связанные с диском:

1) $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$, где $\boldsymbol{e}_z$ вертикален;

2) $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}'$, $\boldsymbol{e}''$, главный в точке O; моменты инерции $A = mr^2/2$, $B = C = mr^2/4$. Симметрия позволяет принять $\boldsymbol{e}' = \boldsymbol{e}_y$, другие векторы

$$\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}\sin\alpha + \boldsymbol{e}''\cos\alpha, \quad \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}\cos\alpha - \boldsymbol{e}''\sin\alpha. \tag{53}$$

Так как точка $Ц$ неподвижна, $\boldsymbol{R}_1 + \boldsymbol{R}_2 = m\boldsymbol{g} = 0$, или

$$\begin{cases} R_{1x} + R_{2x} = 0, \\ R_{1y} + R_{2y} = 0, \\ R_{1z} + R_{2z} - mg = 0. \end{cases} \tag{54}$$

Считаем, что $\boldsymbol{R}_1 \perp Oz$ (ось в точке A_1 удерживается только сбоку), т. е. $R_{1z} = 0$. Тогда $R_{2z} = mg$. Имеем далее

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\boldsymbol{e}_z = \dot{\psi}(\cos\alpha\boldsymbol{e}'' + \sin\alpha\boldsymbol{e}), \tag{55}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_{Ц} = \frac{mr^2}{r}\,\dot{\psi}\cos\alpha\boldsymbol{e}'' + \frac{mr^2}{2}\dot{\psi}\sin\alpha\boldsymbol{e} = (1/4)mr^2\dot{\psi}(\cos\alpha\boldsymbol{e}'' + 2\sin\alpha\boldsymbol{e}) = \tag{56}$$

$$(\text{так как } \boldsymbol{e}'' = \boldsymbol{e}_z\cos\alpha - \boldsymbol{e}_x\sin\alpha, \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}_x\cos\alpha + \boldsymbol{e}_z\sin\alpha) \tag{57}$$

$$= (1/4)mr^2\dot{\psi}(\sin\alpha\cos\alpha\boldsymbol{e}_x + (2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)\boldsymbol{e}_z). \tag{58}$$

Суммарный момент сил с учетом (5)

$$\boldsymbol{G}_{Ц} = [\overrightarrow{ЦA_1} \times \boldsymbol{R}_1] + [\overrightarrow{ЦA_2} \times \boldsymbol{R}_2] = [d\boldsymbol{e}_z \times (\boldsymbol{R}_2 - \boldsymbol{R}_1)] = 2dR_{1x}\boldsymbol{e}_y - 2dR_{1y}\boldsymbol{e}_x. \tag{59}$$

Вектор $\boldsymbol{e}_z$ постоянен и $(\boldsymbol{G}_{Ц}, \boldsymbol{e}_z) \equiv 0$, отсюда

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\Lambda}_{Ц}, \boldsymbol{e}_z) = \left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{\Delta}_{Ц}, \boldsymbol{e}_z\right) = (\boldsymbol{G}_{Ц}, \boldsymbol{e}_z) \equiv 0, \tag{60}$$

так что $(\boldsymbol{\Lambda}_{Ц}, \boldsymbol{e}_z) = \text{const}$ и, наконец, $\dot{\psi} = \text{const}$. Следовательно,

$$\frac{d\boldsymbol{\Lambda}_{Ц}}{dt} = \frac{mr^2}{4}\,\sin\alpha\cos\alpha\dot{\psi}\frac{d\boldsymbol{e}_x}{dt} = \frac{mr^2}{4}\,\sin\alpha\cos\alpha\dot{\psi}[\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_x] = \tag{61}$$

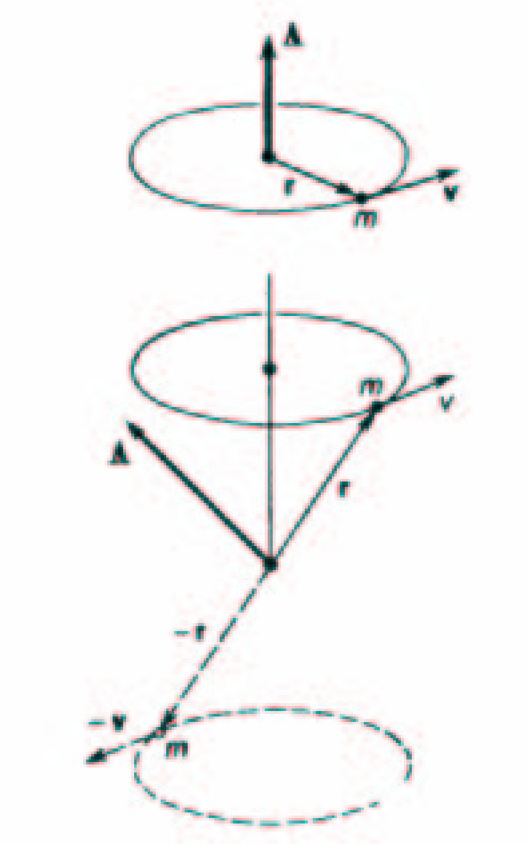
$$= \frac{mr^2\dot{\psi}^2}{r}\,\sin\alpha\cos\alpha\boldsymbol{e}_y. \tag{62}$$

Приравнивая к (6), получаем

$$\frac{mr^2}{4}\,\dot{\psi}^2\sin\alpha\cos\alpha\boldsymbol{e}_y = 2d(R_{1x}\boldsymbol{e}_y - R_{1y}\boldsymbol{e}_x), \tag{63}$$

откуда

$$\begin{cases} R_{1x} = \frac{mr^2}{8d}\,\sin\alpha\cos\alpha\dot{\psi}^2, \\ R_{1y} = 0. \end{cases} \tag{64}$$



Кинетический момент массы, равномерно движущейся по окружности. Если начало координат находится в центре окружности, то момент перпендикулярен плоскости движения. Если начало координат проецируется в центр, то кинетический момент постоянен по модулю, но уже не направлен по нормали и заметает круговой конус (кстати, отсюда вытекает смещение кинетического момента на предыдущем рисунке, так как он получается суммированием кинетических моментов всех частиц тела; для большей ясности надо взять не диск, а палочку). В остальных случаях момент будет менять и величину и направление

Пусть дана кривая $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q)$, *регулярная* в том смысле, что $\frac{d\boldsymbol{r}}{dq} \neq 0$.

Касательный вектор к кривой

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dq} = \frac{dx}{dq}\boldsymbol{e}_x + \frac{dy}{dq}\boldsymbol{e}_y + \frac{dz}{dq}\boldsymbol{e}_z$$

можно нормировать (поскольку кривая регулярна) и получить единичный касательный вектор

$$\boldsymbol{e}_\tau = \frac{\frac{d\boldsymbol{r}}{dq}}{N(q)}, \quad N(q) = \sqrt{\left(\frac{dx}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dq}\right)^2} > 0. \tag{65}$$

Отметим на кривой произвольную точку q_0 и и станем отсчитывать от нее *длину дуги* s (она же – *натуральный параметр*) по формуле

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \Leftrightarrow \frac{ds}{dq} = N(q) \Leftrightarrow s(q) = \int_{q_0}^{q} N(q)\,dq.$$

Функция $s = s(q)$ имеет обратную: $q = q(s)$. Последнюю зависимость подставим в формулы, задающие кривую $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q)$ и получим $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q(s)) = \boldsymbol{r}(s)$,

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dq} \cdot \frac{dq}{ds} = \frac{1}{N} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dq} = \boldsymbol{e}_\tau(s).$$

Для краткости будем считать $' \equiv \dfrac{d}{ds}, \quad '' \equiv \dfrac{d^2}{ds^2}$. Предположим, что $\boldsymbol{r}'' \neq 0$. Тогда введем

$$\boxed{\boldsymbol{e}_\nu \;=\; \frac{\boldsymbol{r}''}{|\,\boldsymbol{r}''\,|}} \tag{66}$$

– единичный вектор *главной нормали*. Наконец, введем *бинормаль*

$$\boxed{\boldsymbol{e}_\beta = [\boldsymbol{e}_\tau \times \boldsymbol{e}_\nu].} \tag{67}$$

Репер $\boldsymbol{e}_\tau\boldsymbol{e}_\nu\boldsymbol{e}_\beta$ называется *естественным* (другое название – *трехгранник Френе*). Величину $k(s) = |\boldsymbol{r}''(s)|$ называют *кривизной* кривой в соответствующей точке, а величина

$$\rho(s) \;=\; 1/\,|\,\boldsymbol{r}''(s)\,|$$

есть *радиус кривизны.*

ТЕОРЕМА. Рассмотрим точку P с радиус-вектором $\boldsymbol{r}(s_0)$ и точку Q (*центр кривизны*) с радиусом-вектором $\boldsymbol{r}(s_0) + \rho(s_0)\boldsymbol{e}_\nu(s_0)$. В плоскости векторов $\boldsymbol{e}_\tau, \boldsymbol{e}_\nu$ (*соприкасающейся плоскости*) проведем окружность с центром в точке Q через точку P. Эта окружность тоже называется *соприкасающейся.* Утверждение состоит в том, что она и данная кривая имеют в точке P касание второго порядка.

Слегка особый взгляд на плоские кривые. Пусть вектор $\boldsymbol{e}_\tau(s)$ повернут на угол $\alpha(s)$ (например, от оси x). Сразу положим $\boldsymbol{e}_\beta = \boldsymbol{e}_z$ и только после этого положим $\boldsymbol{e}_\nu = [\boldsymbol{e}_\beta \times \boldsymbol{e}_\tau]$. Совершенно ясно, что $\dfrac{d\boldsymbol{e}_\tau}{ds} = \alpha'(s)\boldsymbol{e}_\nu$. Отсюда

$$\boxed{k(s) = \frac{d\alpha}{ds}.} \tag{68}$$

Эта функция может иметь любой знак, выражающий направление вращения репера Френе вокруг $\boldsymbol{e}_z$. Кстати, требование $\boldsymbol{r}'' \neq 0$ теперь излишне; точки, в который $k = 0$, просто являются *точками перегиба.* Теперь радиус кривизны $\rho(s) = 1/|k(s)|$.

Задача XXVI. А. Если кривая задана в декартовых координатах в виде $y = y(x)$, то

$$\alpha(x) = \operatorname{arctg} \frac{dy}{dx}, \ ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \ \Rightarrow \ k = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

Б. Кривизна параболы $y = ax^2/2$ в нижней точке равна a.
В. Радиус кривизны эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ в нижней точке равен a^2/b (радикал не дифференцировать, а разлагать в ряд).
Г. Если кривая задана в полярных координатах в виде $r = r(\varphi)$, то

$$\alpha(\varphi) = \varphi + \operatorname{arctg} \frac{dr}{rd\varphi}, \ ds = \sqrt{r'^2 + r^2} d\varphi \ \Rightarrow \ ???$$

Пусть дана кривая $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, где s – натуральный параметр. По ней можно как угодно двигаться, т.е. можно задавать закон движения $s = s(t)$. Возникает сложная функция времени

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(s(t)).$$

Вычисляем скорость

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \dot{s}\boldsymbol{e}_\tau \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{v} = \dot{s}\boldsymbol{e}_\tau} \tag{69}$$

и ускорение

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d\dot{s}}{dt}\boldsymbol{e}_\tau + \dot{s}\frac{d\boldsymbol{e}_\tau}{ds}\frac{ds}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{e}_\tau + \dot{s}^2 k \boldsymbol{e}_\nu} \tag{70}$$

Обратно,

$$k = \frac{|\,[\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}]\,|}{|\,\dot{\boldsymbol{r}}\,|^3}, \quad \varkappa = \frac{(\dot{\boldsymbol{r}}, \ddot{\boldsymbol{r}}, \dddot{\boldsymbol{r}})}{[\dot{\boldsymbol{r}} \times \ddot{\boldsymbol{r}}]^2}, \tag{71}$$

где во второй формуле имеется в виду смешанное произведение трех векторов и скалярный квадрат еще одного.

Задача XXVII. Вычислить кривизну и кручение *винтовой линии* $x = a\cos\omega t$, $x = a\sin\omega t$, $z = ct$.

Задача XXVIII. * Если кривая имеет постоянные кривизну и кручение, то это винтовая линия. Доказать

Задача XXIX. Точка $Q(s)$ находится на конце перпендикуляра $\overrightarrow{PQ}$ длины a, восставленного в точке P кривой $\overrightarrow{OP}(s) = \boldsymbol{r}(s)$. Это происходит в плоскости. Найти натуральный параметр и кривизну кривой $\boldsymbol{R}(s) = \overrightarrow{OQ}(s)$.

Задача XXX. * Обобщить постановку этой задачи на пространственные кривые. Вычислить также и кручение.

Задача XXXI. Точка $Q(s)$ находится на конце нити $\overrightarrow{PQ}$ длины s, сматывающейся с кривой $\overrightarrow{OP}(s) = \boldsymbol{r}(s)$. Это происходит в плоскости. Найти натуральный параметр и кривизну кривой $\boldsymbol{R}(s) = \overrightarrow{OQ}(s)$ (*эвольвента* заданной кривой).

Задача XXXII. Проделать обратное рассуждение (об *эволюте*).

Задача XXXIII. * Обобщить постановку этой задачи на пространственные кривые. Вычислить также и кручение.